Devoir 10

Algèbre linéaire
Lundi 25/03/2024

Exercice I

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ des familles de vecteurs de E, vérifiant les relations

$$f_1 = -e_2,\, f_2 = e_1,\, f_3 = e_1 - e_4,\, f_4 = e_2 + e_3,\, f_5 = 2e_3 - e_6,\, f_6 = 2e_4 + e_5$$

1.a. Montrer que $\operatorname{Vect}\langle \mathscr{F} \rangle \subset \operatorname{Vect}\langle \mathscr{E} \rangle$.
1.b. Exprimer les vecteurs $e_1, \ldots, e_6$ en fonction des vecteurs $f_1, \ldots, f_6$ et montrer que $\operatorname{Vect}\langle \mathscr{E} \rangle = \operatorname{Vect}\langle \mathscr{F} \rangle$.
1.c. On suppose que $\mathscr{E}$ est libre. Déterminer la dimension de $\operatorname{Vect}\langle \mathscr{E} \rangle$ et montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}\langle \mathscr{F} \rangle$.

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on note D l'endomorphisme de E défini par

$$\forall f \in E, D(f) = f'$$

On considère les vecteurs

$$e_1 = (x \mapsto \cos x),\, e_2 = (x \mapsto \sin x),\, e_3 = (x \mapsto x \cos x),\, e_4 = (x \mapsto x \sin x),\, e_5 = (x \mapsto x^2 \cos x),\, e_6 = (x \mapsto x^2 \sin x)$$

et

$$\forall k \in \{1, \ldots, 6\},\, f_k = D(e_k)$$

2. On pose $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, 6\}$, exprimer f_k en fonction des vecteurs de la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. En déduire que, par restriction, D définit un endomorphisme de $\operatorname{Vect}\langle \mathscr{E} \rangle$.

On notera dorénavant D cet endomorphisme.

3.a. Soit P, Q deux polynômes à coefficients réels vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x).\cos(x) + Q(x).\sin(x) = 0$$

En considérant les valeurs de x variant dans chacun des deux ensembles infinis $A = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ montrer que P et Q sont nuls. En déduire que la famille $\mathscr{E}$ est libre.
3.b. En déduire que la famille $\mathscr{F}$ est libre, que D est bijective et donner $D^{-1}(f_6)$.

Exercice II

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, $a \in \mathbb{C}$, on considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - a.y(t) = f(t) \tag{E}$$

On note $\mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes muni de ses opérations usuelles.

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est exponentielle-polynôme (Exp-Pol en abrégé) s'il existe $b \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = P(t)e^{bt}$$

1. Etude de deux exemples.

1.a. On suppose que (E) a une solution Exp-Pol y définie par $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = P(t)e^{bt}$. Montrer qu'alors f est Exp-Pol.

1.b. On considère le cas particulier de l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - y(t) = t^2 e^{-t} \tag{E'}$$

Déterminer les éventuelles solutions Exp-Pol de cette équation.

1.c. Même question pour

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - y(t) = t^2 e^{+t} \tag{E''}$$

2. Un endomorphisme de $\mathbb{C}_q[X]$. Soit $c \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{C}_q[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à q.

On désigne par Id l'application identité de $\mathbb{C}_q[X]$ et D l'application, dite de *dérivation*, qui à $P \in \mathbb{C}_q[X]$ associe $D(P) = P'$, le polynôme dérivé de P.

2.a. Vérifier que $\mathbb{C}_q[X]$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ et que D définit un endomorphisme de $\mathbb{C}_q[X]$.

2.b. Expliciter, suivant les valeurs de c, le noyau de l'endomorphisme $\varphi_c = D + c.\mathrm{Id}$.

2.c. A quelle condition, nécessaire et suffisante portant sur c, ϕ_c est-il bijectif ?

Pour un entier naturel k, on définit

$$D^k = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k \text{ fois}}.$$

2.d. Préciser le plus petit entier naturel n pour lequel $D^n = 0$.

2.e. En supposant $c \neq 0$, simplifier les deux expressions suivantes

$$(D + c.\mathrm{Id}) \circ \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^k \right) \text{ et } \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{c^{k+1}} D^k \right) \circ (D + c.\mathrm{Id})$$

et donner une expression de l'inverse de ϕ_c.

2.f. Supposons $c \neq 0$. Pour un polynôme $Q \in \mathbb{C}_q[X]$, on considère l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$

$$P' + c.P = Q \tag{F}$$

Montrer que (F) admet une unique solution P dans $\mathbb{C}_q[X]$, expliciter celle-ci en fonction de Q et de ses dérivés. Pourquoi est-ce l'unique solution de (F) ?

3. On revient à l'équation différentielle (E) et on suppose que f est Exp-Pol, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{bt}Q(t)$ où $b \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}_q[X]$.

3.a. On suppose $a \neq b$ et on pose $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{bt}P(t)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que y soit solution de (E), montrer que ce polynôme est de degré $\leq q$ et l'exprimer en fonction du polynôme Q et de ses dérivés.

3.b. On suppose $a = b$ et on pose $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{at}P(t)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. Que dire des polynômes P tels que y est solution de (E) ?

3.c. Retrouver par ce biais les résultats des deux exemples introductifs (E') et (E'').

Problème III

On fixe un entier naturel $d \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathbb{C}_d[X] = \{P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) \leq d\}$.

On rappelle que $\mathbb{C}_d[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ et on note $\mathscr{M}_d = (1, X, \ldots, X^d)$ sa base canonique. On rappelle aussi qu'on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Partie A

Une famille de polynômes

Pour un entier naturel $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$N_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{k!} \prod_{\ell=0}^{k-1} (X - \ell) & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

A.1. On cherche à montrer que pour tout entier relatif $p \in \mathbb{Z}$, pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, $N_k(p)$ est un entier relatif. Soient $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$.

A.1.a. Traiter le cas où $0 \leq p \leq k-1$.

A.1.b. Traiter le cas où $p \geq k$ en posant $p = k + q$ avec $q \geq 0$. On fera apparaitre distinctement un coefficient binomial.

A.1.c. Que vaut $N_k(k)$?

A.1.d. Traiter de même le cas où $p < 0$ en posant $p = -q$ avec $q \geq 1$ et conclure.

A.2.a. On suppose que $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ et on pose $A = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k . N_k$. Montrer qu'alors

$$\forall p \in \mathbb{Z}, A(p) \in \mathbb{Z}$$

A.2.b. Réciproquement [1], on suppose que $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$, on pose $A = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k . N_k$ et on suppose que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, A(p) \in \mathbb{Z}$$

Montrer qu'alors $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$.

A.3.a. Montrer que la famille $\mathscr{N}_d = (N_0, N_1, \ldots, N_d)$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$.

A.3.b. Soit $A \in \mathbb{C}_d[X]$. Montrer l'équivalence entre

1. $\forall p \in \mathbb{Z}, A(p) \in \mathbb{Z}$
2. Les coordonnées de A dans la base $\mathscr{N}_d$ de $\mathbb{C}_d[X]$ sont toutes entières.

A.4. On définit $P = (p_{ij})_{0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq d}$ la matrice de passage [2] de la base $\mathscr{N}_d$ à la base $\mathscr{M}_d$ de $\mathbb{C}_d[X]$, *i.e.*

$$\forall j \in \{0, \ldots, d\}, X^j = \sum_{i=0}^{d} p_{ij} N_i \qquad (*)$$

Démontrer, sans chercher à déterminer exactement les coefficients p_{ij} que

A.4.a.

$$\forall i \in \{0, \ldots, d\}, \forall j \in \{0, \ldots, d\}, p_{ij} \in \mathbb{Z}$$

A.4.b. P est triangulaire supérieure, *i.e.* $\forall i \in \{0, \ldots, d\}, \forall j \in \{0, \ldots, d\}, j < i \Rightarrow p_{ij} = 0$.

Indication:On pourra montrer tout d'abord que P^{-1} est triangulaire supérieure et exhiber ses coefficients diagonaux.

A.4.c.

$$\forall j \in \{0, \ldots, d\}, p_{jj} = j!$$

1. Il s'agit d'une question nécessitant une rédaction par récurrence relativement difficile, on commencera par étudier la situation $d = 2$

2. attention ! les lignes et colonnes sont numérotées de 0 à d pour respecter la numérotation des bases $\mathscr{M}_d$ et $\mathscr{N}_d$

A.4.d.

$$\forall j \in \{0,\dots,d\}\,,\, p_{0j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } j>0 \end{cases}$$

(On pourra observer l'évaluation en 0 de l'identité (*).)

Partie B

Un endormorphisme de $\mathbb{C}_d[X]$

On note $\sigma : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ définie [3] par

$$\forall A \in \mathbb{C}[X],\, \sigma(A) = A(X+1)$$

B.1.a. Montrer que σ est linéaire.
B.1.b. Montrer que par restriction des espaces de départ et d'arrivée, σ définit un endomorphisme de $\mathbb{C}_d[X]$ que l'on note encore σ.
B.2. Ecrire, notamment à l'aide des coefficients binomiaux, $S_{\mathscr{M}}$ la matrice de σ relativement à $\mathscr{M}_d$, la base canonique de $\mathbb{C}_d[X]$.
B.3. Montrer que $S_{\mathscr{N}}$, la matrice $(d+1)\times(d+1)$, définie par

$$S_{\mathscr{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de σ relativement à $\mathscr{N}_d$, la base de $\mathbb{C}_d[X]$ définie dans la partie précédente.
B.4. Justifier la relation

$$S_{\mathscr{N}}.P = P.S_{\mathscr{M}}$$

B.5. Montrer, en analysant l'entrée (i,j) de l'égalité précédente, que

$$\forall i \in \{0,\dots,d-1\}\,,\, \forall j \in \{0,\dots,d\}\,,\, p_{(i+1)j} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} p_{ik}$$

B.6. On se place dans le cas $d=3$. Donner la valeur explicite de la matrice P ainsi que les coordonnées de X^3 sur la base (N_0, N_1, N_2, N_3).
B.7. Ecrire une fonction Python `P(d=2)` construisant et retournant la matrice P pour l'entier `d` en paramètre optionnel et retrouver, par un calcul à la machine, le résultat de la question précédente. La fonction `binom(k,j)` du module `scipy.special` retourne le coefficient binomial $\binom{k}{j}$.

Partie C

Une application en probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels distincts et X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{x_1,\dots,x_n\}$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}\,,\, \mathbb{P}(X = x_k) = q_k$$

où $(q_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une suite finie de nombre réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{k=1}^{n} q_k = 1$.

On note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle Y.

3. σ comme *shift*, anglais pour *décalage*

C.1. On définit une fonction sur $]0,+\infty[$ associée à X par la formule

$$\forall t > 0,\, f(t) = \sum_{k=1}^{n} q_k.t^{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k).t^{x_k}$$

C.1.a. Que vaut $f(1)$?
C.1.b. Montrer que $\mathbb{E}(X) = f'(1)$
C.1.c. Montrer que $\mathbb{E}(X.(X-1)) = f''(1)$
C.1.d. Et enfin montrer que $\mathbb{E}(X.(X-1).(X-2)) = f'''(1)$
C.2. En utilisant la question B.6, exprimer $\mathbb{E}(X^3)$ en fonction de $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ et $f'''(1)$.