Devoir Surveillé 01

Le samedi 16 septembre 2023
durée 3h00

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez la composition.

Problème

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $z_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et $x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$.

Le but essentiel de ce problème est, après avoir démontré la convergence de la suite numérique $z = (z_n)$ en partie A, de donner l'expression exacte de sa limite en partie B. On étudie en parallèle la convergence et la valeur de la limite de la suite $x = (x_n)$ et on donne une application de ce résultat au calcul d'une intégrale en partie C. Quelques calculs informatiques en partie D illustrent ces résultats théoriques.

Partie A

Deux suites convergentes.

A.1.a. Démontrer que la suite $z = (z_n)$ est croissante.
A.1.b. Démontrer la majoration :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

A.1.c. Conclure sur la convergence de la suite z vers un nombre que l'on notera[1] ζ et qui vérifie :

$$\frac{5}{4} \leq \zeta \leq 2.$$

A.2.a. Démontrer que les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes où on a défini :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = x_{2(k+1)},\ b_k = x_{2k+1}.$$

A.2.b. Conclure sur la convergence de la suite x vers un nombre que l'on notera ξ et qui vérifie :

$$\frac{3}{4} \leq \xi \leq 1.$$

A.3.a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$z_{2k} - x_{2k} = \frac{1}{2}.z_k$$

A.3.b. En déduire que $\xi = \frac{1}{2}\zeta$.

1. ζ :« zeta », le 'z' grec ; ξ :« xi », le 'x' grec ;

Partie B

Calcul de limites.

Dans cette partie, on veut déterminer la valeur exacte de ζ et de ξ.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt.$$

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos^m(t) = (\cos(t))^m$.

B.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de w définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\, w(t) = \sin(t).\cos^{2n}(t)$$

B.2.a. Calculer W_0 et W_1.

B.2.b. Soit n un entier de $\mathbb{N}$. Justifier que $W_n > 0$.

B.2.c. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\, dt.$$

B.2.d. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n.$$

B.3.a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t)\cos^{2n+1}(t)\, dt.$$

B.3.b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}.$$

B.3.c. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}$$

B.3.d. Conclure que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2}.z_n.$$

B.4.a. Montrer que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} t \leqslant \sin(t) \leqslant t.$$

B.4.b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$ puis que $0 \leq J_n \leqslant \dfrac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$.

B.5.a. Montrer que lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{J_n}{W_n} \to 0$$

B.5.b. Calculer J_0 et en déduire les valeurs de ζ puis de ξ.

Partie C
Calcul d'une intégrale.

C.1. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

C.2. Justifier que

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \ln(1+t) - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{t^p}{p} \right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

C.3. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

C.3.a. Justifier que f est continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$.
C.3.b. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \left| f(t) - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{t^{p-1}}{p} \right| \leqslant \frac{t^n}{n+1}.$$

C.3.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_0^1 f(t)\, dt - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

C.4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

Partie D
Eléments informatiques.

On suppose importée la bibliothèque `numpy` sous son alias habituel `np`.
D.1. Ecrire une fonction `z(n)`, qui, étant donné un entier `n`, retourne `zn`, la valeur de z_n.
D.2. Ecrire une fonction `x(n)`, qui, étant donné un entier `n`, retourne `xn`, la valeur de x_n. On demande de ne pas utiliser de fonction puissance ou assimilée (du type `(-1)**(p-1)` ou `np.pow(-1,p-1)`) pour calculer le signe placé au numérateur.
D.3. Qu'attendre de la valeur de `2*z(20)-2*x(20)-z(10)` ?
D.4. Ecrire une fonction `SR(n=1000)` qui calcule une approximation de $\int_0^1 f(t)\, dt$ en utilisant une somme de RIEMANN de `n` termes. On prendra garde à la difficulté que pose f en 0.
D.5. Qu'attendre de la valeur de `SR()-x(20)` ?

PYTHON
AGRO-VETO
2020

Listes

`[]`	Créer une liste vide
`[a]*n`	Créer une liste avec n fois l'élément `a`
`L.append(a)`	Ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`
`L1 + L2`	Concatène les deux listes `L1` et `L2`
`len(L)`	Renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`
`L.pop(k)`	Renvoie l'élément d'indice k de `L` et l'enlève de `L`
`L.remove(a)`	Enlève une fois la valeur `a` de la liste `L`
`max(L)`	Renvoie le plus grand élément de la liste `L`
`min(L)`	Renvoie le plus petit élément de la liste `L`
`sum(L)`	Renvoie la somme de tous les éléments de la liste `L`

Numpy

`import numpy as np`

`np.array()`	Transforme une liste en matrice `numpy`
`np.linspace(a,b,n)`	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus)
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$
`np.eye(n)`	Crée la matrice identité de taille n
`np.diag(L)`	Crée la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les éléments de la liste `L`
`np.transpose(M)`	Renvoie la transposée de M
`np.dot(M,P)`	Renvoie le produit matriciel MP
`np.sum(M)`	Renvoie la somme de tous les éléments de M
`np.prod(M)`	Renvoie le produit de tous les éléments de M
`np.max(M)`	Renvoie le plus grand élément de M
`np.min(M)`	Renvoie le plus petit élément de M
`np.shape(M)`	Renvoie dans un couple le format de la matrice M
`np.size(M)`	Renvoie le nombre d'éléments de M

Numpy.linalg

`import numpy.linalg as la`

`la.inv(M)`	Renvoie l'inverse de la matrice M si elle est inversible
`la.eigvals(M)`	Renvoie la liste des valeurs propres de M
`la.eig(M)`	Renvoie un couple `L,P` où `L` est la liste des valeurs propres de M et `P` la matrice de passage associée
`la.matrix_rank(M)`	Renvoie le rang de M

Random

`import numpy.random as rd`

`rd.rand()`	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$
`rd.randint(a,b)`	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b[\![)$
`rd.gauss(0,1)`	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
`rd.choice(L)`	Choisit aléatoirement un élément de la liste `L`

Math

`import numpy as np`

`np.atan(x)`	Renvoie $\arctan(x)$
`np.floor(x)`	Renvoie $\lfloor x \rfloor$
`np.factorial(n)`	Renvoie $n!$ si $n \in \mathbb{N}$
`np.sqrt(x)`	Renvoie $\sqrt{x}$ si $x \geq 0$
`np.log(x)`	Renvoie $\ln(x)$ si $x > 0$
`np.exp(x)`	Renvoie e^x

Logique

`a == b`	Teste l'égalité « $a = b$ »
`a != b`	Teste « $a \neq b$ »
`a < b`	Teste « $a < b$ »
`a <= b`	Teste « $a \leq b$ »
`a > b`	Teste « $a > b$ »
`a >= b`	Teste « $a \geq b$ »
`not A`	Renvoie la négation de A
`A and B`	Renvoie « A et B »
`A or B`	Renvoie « A ou B »
`True`	Constante booléenne « Vrai »
`False`	Constante booléenne « Faux »

Matplotlib.pyplot

`import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot(X,Y,'+-r')`	Génère la courbe des points définis par les listes `X` et `Y` (abscisses et ordonnées) avec les options : • symbole : `'.'` point, `'o'` rond, `'h'` hexagone, `'+'` plus, `'x'` croix, `'*'` étoile, … • ligne : `'-'` trait plein, `'--'` pointillé, `'-.'` alterné, … • couleur : `'b'` **bleu** , `'r'` **rouge** , `'g'` **vert** , `'c'` **cyan** , `'m'` **magenta** , `'k'` **noir** , …
`plt.bar(X,Y)`	Génère l'histogramme des points définis par les listes `X` et `Y` (abscisses et ordonnées)
`plt.axis('equal')`	Rend le repère orthonormé
`plt.xlim(xmin,xmax)`	Fixe les bornes de l'axe des abscisses
`plt.ylim(ymin,ymax)`	Fixe les bornes de l'axe des ordonnées
`plt.show()`	Affiche le graphique

Cette liste est non exhaustive. Les candidats sont libres d'utiliser les commandes de leur choix.

Correction DS 01

Correction Ex.–1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$z_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \text{ et } x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}.$$

Partie A
Deux suites convergentes.

A.1.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} - z_n > 0$, la suite $z = (z_n)$ est croissante.
A.1.b. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} + \frac{-1}{p.(p-1)} = \frac{p-1-p}{p^2(p-1)} = \frac{-1}{p^2(p-1) < 0}$$

et donc

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, en sommant les inégalités précédents pour p variant de 2 à n, on en déduit (somme télescopique) que

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{n}$$

et en ajoutant le terme pour $p = 1$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

A.1.c. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \leq 2$, la suite z est majorée par 2. Comme z est croissante, elle est convergente (théorème de « la limite monotone ») vers une limite ζ vérfiant (par exemple)

$$z_2 \leq \zeta \leq 2$$

Comme $z_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, on a obtenu l'inégalité voulue :

$$\frac{5}{4} \leq \zeta \leq 2.$$

A.2.a. On rappelle que deux suites réelles (a_k) et (b_k) sont adjacentes si :

1. L'une (par exemple (a_k)) est croissante, l'autre ((b_k)) décroissante,
2. la différence des deux a pour limite 0 : $b_k - a_k \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.

1. Ici, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= x_{2(k+2)} - x_{2(k+1)} = x_{2k+4} - x_{2k+2} = \sum_{p=1}^{2k+4} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} - \sum_{p=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \sum_{p=2k+3}^{2k+4} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \\ &= \frac{1}{(2k+3)^2} - \frac{1}{(2k+4)^2} > 0 \end{aligned}$$

Comme k est quelconque, la suite (a_k) est croissante.

2. De même, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k &= x_{2(k+1)+1} - x_{2k+1} = x_{2k+3} - x_{2k+1} = \sum_{p=1}^{2k+3} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} - \sum_{p=1}^{2k+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \sum_{p=2k+2}^{2k+3} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \\ &= \frac{1}{(2k+3)^2} - \frac{1}{(2k+2)^2} < 0 \end{aligned}$$

Comme k est quelconque, la suite (b_k) est décroissante.

3. Finalement, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_k - a_k &= x_{2k+1} - x_{2(k+1)} = x_{2k+1} - x_{2k+2} = \sum_{p=1}^{2k+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} - \sum_{p=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = - \sum_{p=2k+2}^{2k+2} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \\ &= +\frac{1}{(2k+2)^2} \end{aligned}$$

On a donc, lorsque $k \to +\infty$, $b_k - a_k \to 0$.

A.2.b. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes et le théorème des suites adjacentes implique alors qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}$, limite commune de ces deux suites et que par ailleurs :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \xi \leq b_k$$

Les suites (a_k) et (b_k) étant les suites extraites de x en conservant respectivement les indices pais et les indices impairs, al convergence de ces deux suites vers une même limite ξ implique que la suite x converge vers ξ. Comme $b_0 = x_1 = 1$ et $a_0 = x_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, il vient :

$$\frac{3}{4} \leq \xi \leq 1.$$

A.3.a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a, en mettant les indices pairs et impairs dans deux paquets disjoints dans chacune des sommes ($p = 2q$ ou ($p = 2q+1$), en simplifiant et enfin en factorisant $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} z_{2k} - x_{2k} &= \sum_{p=1}^{2k} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{2k+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \\ &= \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{(2q)^2} + \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{(2q+1)^2} - \sum_{q=1}^{k} \frac{(-1)^{2q-1}}{(2q)^2} - \sum_{q=0}^{k-1} \frac{(-1)^{2q+1-1}}{(2q+1)^2} \\ &= \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{(2q)^2} + \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{(2q+1)^2} + \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{(2q)^2} - \sum_{q=0}^{k-1} \frac{1}{(2q+1)^2} \\ &= 2\sum_{q=1}^{k} \frac{1}{(2q)^2} = \frac{2}{4} \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2} z_k \end{aligned}$$

On a donc bien
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, z_{2k} - x_{2k} = \frac{1}{2}.z_k$$
A.3.b. En passant la fmaille d'identité précédentes à la limite lorsque $k \to +\infty$, sachant que $z_{2k} \to \zeta$, $z_k \to \zeta$, $x_{2k} \to \xi$, on obtient par opérations et unicité de la limite,
$$\zeta - \xi = \frac{1}{2}\zeta$$
et en, réarrangeant, $\xi = \frac{1}{2}\zeta$.

Partie B
Calcul de limites.

Dans cette partie, on veut déterminer la valeur exacte de ζ et de ξ.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt.$$
On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos^m(t) = (\cos(t))^m$.
B.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de w est W définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}, W(t) = -\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t)$$
B.2.a. On a :
$$W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$
et, en utilisant (linéarisation) $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$ et la linéarité de l'intégrale, il vient
$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\,dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$
B.2.b. Soit n un entier de $\mathbb{N}$. L'intégrande de W_n, la fonction $t \mapsto \cos^2(t)$ est continue, strictement positive (sauf en une extrémité) sur l'intervalle d'intégration non trivial $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intégrale W_n est donc > 0.
B.2.c. Soit n de $\mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale puis par l'identité $1 - \cos^2(t) = \sin(t).\sin(t)$:
$$\begin{aligned} W_n - W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t).\cos^{2n}(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t)).\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,dt. \end{aligned}$$
B.2.d. On peut maintenant procéder à une intégration par partie dans cette dernière identité en posant $v(t) = \sin(t)$, $v'(t) = \cos(t)$, $u'(t) = \sin(t)\cos^{2n}(t) = w(t)$ et $u(t) = -\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t) = W(t)$ (*cf.* B.1). Les fonctions u et v ainsi définies sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a
$$\begin{aligned} W_n - W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)}\underbrace{\sin(t)\cos^{2n}(t)}_{u'(t)}\,dt \\ &= \left[\underbrace{\sin(t)}_{v(t)}.\underbrace{\frac{-1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t)}_{u(t)}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)}\underbrace{\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t)}_{-u(t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2n+1}W_{n+1} \end{aligned}$$

En réorganisant cette égalité :
$$(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n.$$

B.3.a. Sur le même modèle et la même idée d'intégration par parties : Soit n de $\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} J_n - J_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n}(t)\,dt - \int_0^{\pi/2} t^2\cos^2(t).\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{t^2\sin(t)}_{v(t)}\underbrace{\sin(t)\cos^{2n}(t)\,dt}_{u'(t)}. \end{aligned}$$

On a posé $v(t) = t^2\sin(t)$ et v est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ v'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t)$$

On obtient finalement, du fait que $v(0) = 0$ et $u(\frac{\pi}{2}) = 0$:
$$\begin{aligned} J_n - J_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \left(t^2\cos(t) + 2t\sin(t)\right)\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} t^2\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+2}(t)\,dt + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt \end{aligned}$$
.

On a donc obtenu :
$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt.$$

B.3.b. En réintégrant par parties mais maintenant on prend (*cf.* B.1 avec l'exposant légèrement modifié) $u(t) = -\frac{1}{2n+2}\cos^{2n+2}(t)$, $u'(t) = \sin(t)\cos^{2n+1}(t)$, $v(t) = t$, $v'(t) = 1$ (on a toujours l'annulation aux bornes :$v(0) = 0$, $u(\frac{\pi}{2}) = 0$)
$$\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt = \frac{1}{2n+2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}(t)\,dt = \frac{1}{2n+2}W_{n+1}$$
et donc, en injectant ceci dans l'identité obtenue à la question précédente : pour n de $\mathbb{N}$:
$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{(2n+1)(2n+2)}W_{n+1}$$
En réarrangeant cette identité ($J_{n+1} + \frac{1}{2n+1}J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}J_{n+1}$), on obtient :
$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)}W_{n+1}.$$

B.3.c. Soit n de $\mathbb{N}$, on peut diviser par W_{n+1} l'identité précédente (ce nombre est > 0) pour obtenir :
$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)}\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)}\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{-2}{(2n+2)^2}.$$

B.3.d. Soit n de $\mathbb{N}^*$, sommons les identités précédentes (on a substitué n par k) pour k variant de 0 à $n-1$ pour obtenir par télescopie :
$$\begin{aligned} \frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{J_{k+1}}{W_{k+1}} - \frac{J_k}{W_k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{-2}{(2(k+1))^2} \\ [p=k+1] \quad &= -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2}.z_n. \end{aligned}$$

B.4.a. Pour montrer que
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t,$$
posons $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, définissons les deux fonctions $f : I \ni t \mapsto t - \sin t$ et $g : I \ni t \mapsto \sin t - \frac{2}{\pi}.t$ qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et vérifient :
$$\forall t \in I, f'(t) = 1 - \cos(t), g'(t) = \cos(t) - \frac{2}{\pi}, g''(t) = -\sin(t)$$

- Concernant f : f' est positive sur I donc f y est croissante et comme $f(0) = 0$, on obtient
$$\forall t \in I, f(t) \geq f(0) = 0$$
c'est à dire
$$\forall t \in I, t \geq \sin(t)$$
- Concernant g : Remarquons que $g(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par le théorème de ROLLE, il existe $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Par ailleurs, g'' est strictement négative sur I (sauf en une extrémité), donc g' est strictement décroissante sur I et donc
$$\forall t \in [0, \alpha[, g'(t) > 0 \text{ et } \forall t \in \left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right], g'(t) < 0$$
On peut donc tracer le tableau de variations de g :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$			$g(\alpha)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

On en conclut que :
$$\forall t \in I, g(t) \geq 0$$
ce qui se réécrit en
$$\forall t \in I, \sin t \geq \frac{2}{\pi}.t.$$

B.4.b. Soit n de $\mathbb{N}$: par la question précédente, (et signe de t^2)
$$\forall t \in I, 0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin(t)^2$$
Par croissance de l'intégrale, on a donc, en intégrant ces inégalités sur I, (après multiplication par $\cos^{2n}(t) \geq 0$) :
$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2.\cos^{2n}(t)\, dt \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2.\cos^{2n}(t)\, dt$$
ce qui, d'après la définition de J_n et B.2.c se réécrit en
$$0 \leq J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(W_n - W_{n+1}\right).$$
D'après B.2.d (les deux identités),
$$W_n - W_{n+1} = \frac{1}{2n+1}W_{n+1} = \frac{1}{2n+2}W_n$$
il vient, par substitution :
$$0 \leq J_n \leqslant \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}.$$

B.5.a. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{J_n}{W_n} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}$$

et donc, vu que $\frac{\pi^2}{8(n+1)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{J_n}{W_n} \to 0.$$

B.5.b. On a

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

D'après B.2.d, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = 2\frac{J_0}{W_0} - 2\frac{J_n}{W_n},$$

en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on déduit de $2\frac{J_n}{W_n} \to 0$ et $z_n \to \zeta$ que

$$\zeta = 2\frac{J_0}{W_0} = 2.\frac{\pi^3}{24}.\frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

et finalement :

$$\zeta = \frac{\pi^2}{6}, \xi = \frac{1}{2}\zeta = \frac{\pi^2}{12}$$

Partie C

Calcul d'une intégrale.

C.1. La formule

$$\forall t \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

est une recopie à peine altérée de la formule de somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q avec $q = -t$. Cette formule est valable car $t \neq -1$.
C.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Réorganisons la formule précédente en :

$$\forall t \in [0,1], \frac{1}{1+t} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1} = \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

Par inégalité triangulaire (et le fait que $t^n \geq 0$ pour les t concernés et enfin que $1+t \geq 1 > 0$), il vient

$$\forall t \in [0,1], \left| \frac{1}{1+t} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1} \right| \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

Soit maintenant $T \in [0,1]$ intégrons l'inégalité précédente pour t variant entre 0 et t. Il vient

$$\int_0^T \left| \frac{1}{1+t} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1} \right| dt \leq \int_0^T t^n\, dt = \frac{T^{n+1}}{n+1}$$

Par ailleurs, par inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left| \int_0^T \frac{1}{1+t} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1}\, dt \right| \leq \int_0^T \left| \frac{1}{1+t} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} t^{p-1} \right| dt,$$

c'est à dire, en calculant le terme de gauche explicitement

$$\left|\ln(1+T)-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{T^p}{p}\right| \leq \int_0^T \left|\frac{1}{1+t}-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}t^{p-1}\right| dt,$$

On peut alors conclure, en regroupant les deux inégalités que :

$$\forall T\in[0,1]\,,\left|\ln(1+T)-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{T^p}{p}\right| \leqslant \frac{T^{n+1}}{n+1}.$$

ce qui est, à renommage de T en t près, la famille d'inégalités demandée.

C.3. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\forall t\in[0,1]\,, f(t)=\begin{cases}\frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t>0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$$

C.3.a. En reprenant l'inégalité précédente pour et en divisant par $T>0$, on a

$$\forall T\in\,]0,1]\,,\left|\frac{\ln(1+T)}{T}-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{T^{p-1}}{p}\right| \leqslant \frac{T^{n}}{n+1}.$$

Pour $n=1$, cela donne (vu que $1=f(0)$)

$$\forall T\in\,]0,1]\,,|f(T)-f(0)|\leqslant\frac{T}{2}.$$

et montre, par le théorème des gendarmes que $f(T)\to f(0)$ lorsque $T\to 0^+$. La fonction f est donc contionue en 0.

Etant continue par les théorèmes opératoires sur $]0,1]$, f s'avère être continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$.

C.3.b. On a obtenu

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\in[0,1]\,,\left|f(t)-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{t^{p-1}}{p}\right|\leqslant\frac{t^n}{n+1}$$

à la question précédente.

C.3.c. On peut maintenant, comme en C.2 par croissance de l'intégrale d'une part et inégalité triangluaire sur les intégrales d'autre part obtenir, pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1\left|f(t)\,dt-\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}t^{p-1}}{p}\right|dt\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{n+1}\,dt=\frac{1}{(n+1)^2}$$

et

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}t^{p-1}}{p}\,dt\right|\leq\int_0^1\left|f(t)\,dt-\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}t^{p-1}}{p}\right|dt$$

Comme le terme de gauche de cette inégalité vaut

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right|$$

et que le terme de droite se majore par $\frac{1}{(n+1)^2}$, il vient :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}.$$

C.4. En faisant tendre n vers $+\infty$, on déduit du théorème des gendarmes et de $\frac{1}{(n+1)^2} \to 0$ que

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \to \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Sachant par ailleurs que $\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \to \xi = \frac{\pi^2}{12}$, par unicité de la limite

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

Partie D

Eléments informatiques.

D.1.

```
def z(n):
    zn = 0
    for p in range(1,n+1) :
        zn += 1/(p*p)
    return zn
```

D.2.

```
def x(n):
    xn = 0
    s = 1
    for p in range(1,n+1) :
        xn += s/(p*p)
        s = -s
    return xn
```

D.3. D'après A.3.a La valeur de `2*z(20)-2*x(20)-z(10)` est théoriquement nulle. Elle est pratiquement nulle aux arrondis près, souvent de l'ordre de 10^{-8}.

D.4. On utilise les somme de RIEMANN à droite pour ne pas avoir à calculer $f(0)$. Cela permet de définir $f(x)$ seulement pour $x > 0$.

```
def f(t) :
    return np.log(1+t)/t

def SR(n):
    delta = 1/n
    S = 0.0
    x = 0
    for k in range(1,n+1):
        x += delta
        S += f(x)
    return delta*S
```

D.5. La valeur de `SR()-x(20)` n'est pas nulle théoriquement, elle est contrôlée (en v.abs) d'une part parl'inégalité de C.3.c et d'autre par le fait que la valeur `SR()` n'est qu'une aproximation de l'intégrale. A vue de nez, la différence est ~ 0.01 mais guère plus.