Devoir Surveillé 05

Le vendredi 2 février 2024
durée 2h00

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez la composition.

Problème

L'objectif de ce problème est l'étude de deux populations en interaction.

Après avoir démontré deux résultats préliminaires en partie A, on étudie un système différentiel qui modélise l'évolution de ces deux populations en partie B. Cette étude est poursuivie en partie C où on applique les méthodes du calcul matriciel pour se consacrer à un modèle discret dont on montrera les limites.

Les trois parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, a, b, c et d désignent quatre réels strictement positifs. Si E et F sont des ensembles alors on note $\mathscr{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F.

Concernant les ensembles de nombres, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'intervalle $[0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]0, +\infty[$ et enfin $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note par ailleurs $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices 2×2, à coefficients complexes. Pour les besoins du calcul matriciel, un vecteur de $\mathbb{C}^2$ peut-être noté en matrice colonne.

Partie A
Résultats préliminaires

A.1.a. Démontrer que $\ln(x) - x + 1 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
A.1.b. En déduire que :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad a.\left(\ln\left(\frac{b.y}{a}\right) - \frac{b.y}{a} + 1\right) \leq d\left(-\ln\left(\frac{c.x}{d}\right) + \frac{c.x}{d} - 1\right).$$

A.2. Soient $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3$, $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_0 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

A.2.a. Démontrer que, pour un nombre complexe λ, la matrice $A - \lambda.I$ n'est pas inversible si et seulement si $(x_0 - \lambda)^2 = x_1.x_2$.

A.2.b. On suppose $x_1.x_2 \neq 0$ et on note δ une racine carrée du nombre complexe $x_1.x_2$. On pose les vecteurs dans $\mathbb{C}^2$:

$$P_+ = \begin{pmatrix} \delta \\ x_2 \end{pmatrix}, P_- = \begin{pmatrix} -\delta \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et finalement $P = (P_+ | P_-) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice dont les colonnes sont, dans cet ordre, P_+ et P_-.

Montrer que P est inversible et, en calculant $A.P_+$ et $A.P_-$, vérifier que $P^{-1}.A.P$ est une matrice diagonale que l'on précisera.

Partie B

Un système différentiel

On considère le système différentiel ($\mathscr{S}_1$) ci-dessous où x désigne l'effectif d'une population de bactéries en fonction du temps $t \in \mathbb{R}_+$et y l'effectif d'une population de protozoaires en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$. Enfin, $(\widetilde{x_0}, \widetilde{y_0}) \in \mathbb{R}^2$ désigne les effectifs relevés à un instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = \widetilde{x_0} \\ y(t_0) = \widetilde{y_0} \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (a - b.y(t)).x(t) \\ y'(t) & = & (c.x(t) - d).y(t) \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad (\mathscr{S}_1)$$

On admet le théorème suivant [1], dit de CAUCHY-LIPSCHITZ :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \forall (\widetilde{x_0}, \widetilde{y_0}) \in \mathbb{R}^2, \exists ! (x,y) \in (\mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^2, \quad (x,y) \text{ solution de } (\mathscr{S}_1).$$

B.1. Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $(\widetilde{x_0}, \widetilde{y_0}) \in \mathbb{R}^2$.

B.1.a. Démontrer que si $\widetilde{x_0} = 0$ alors $\left(x : t \mapsto 0, y : t \mapsto \widetilde{y_0}.e^{-d.(t-t_0)}\right)$ est l'unique couple solution de ($\mathscr{S}_1$). Quel est l'unique couple solution si $\widetilde{y_0} = 0$?

B.1.b. Pour quelles conditions initiales $\widetilde{x_0}$ et $\widetilde{y_0}$ les solutions sont-elles constantes (c'est-à-dire pour lesquelles x et y sont deux fonctions constantes indépendantes du temps) ?

B.2. On suppose dorénavant que $\widetilde{x_0} > 0$ et $\widetilde{y_0} > 0$.

B.2.a. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que si (x,y) est solution de ($\mathscr{S}_1$) alors ni x ni y ne s'annulent.

B.2.b. En déduire que si (x,y) est solution de ($\mathscr{S}_1$) alors x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

B.3. On note $\varphi \in \mathscr{F}\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \mathbb{R}\right)$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \varphi(x,y) = c.x - d.\ln(x) + b.y - a.\ln(y).$$

On admet que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'elle admet au moins un extremum.

B.3.a. Calculer les dérivées partielles premières de φ.

B.3.b. Démontrer que φ admet exactement un extremum et préciser en quel point.

B.3.c. Démontrer qu'il s'agit d'un minimum (on utilisera la partie A).

B.4. Démontrer que si (x,y) est un couple solution de ($\mathscr{S}_1$) alors $t \mapsto \varphi(x(t), y(t))$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.

1. On rappelle que le symbole logique $\exists !$ signifie « il existe un unique »

Partie C

Un modèle discret

Sauf pour quelques cas particuliers, on ne sait pas résoudre $(\mathscr{S}_1)$.

On se propose donc d'utiliser un modèle discret selon lequel x_n désigne l'effectif de cette population de bactéries et y_n celui de cette population de protozoaires en fonction de n, nombre de jours écoulés depuis un instant initial correspondant à $n=0$. On fait les hypothèses suivantes :

— À l'instant $n=0$, l'effectif des bactéries est égal à $\widetilde{x_0}$.

— les bactéries se développent selon un taux journalier de natalité égal à a.

— les bactéries meurent selon un taux journalier de mortalité égal à $b.y_n$.

C.1. À l'aide des hypothèses précédentes et en formulant précisément des hypothèses relatives aux protozoaires, démontrer que le couple $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est solution du système ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0=\widetilde{x_0} \\ y_0=\widetilde{y_0} \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1}-x_n &=& (a-b.y_n).x_n \\ y_{n+1}-y_n &=& (c.x_n-d).y_n \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_2)$$

C.2. On fait l'hypothèse que, dorénavant, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n=x_n-\frac{d}{c}$ et $v_n=y_n-\frac{a}{b}$ sont bornées et que les quantités $b.u_n.v_n$ et $c.u_n.v_n$ sont négligeables devant u_n et v_n.

C.2.a. Justifier qu'étudier $(\mathscr{S}_2)$ dans ces conditions revient à étudier une suite récurrente vectorielle de terme général $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=A.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\ \text{avec}\ A=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\ \text{en posant}\ \alpha=\frac{b.d}{c}\ \text{et}\ \beta=\frac{a.c}{b}$$

et montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=A^n.\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

C.2.b. À l'aide de la question A.2, vérifier qu'en posant $\delta=\mathrm{i}\sqrt{\alpha.\beta}$ alors il existe une matrice P que l'on donnera, inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=P.\begin{pmatrix} (1+\delta)^n & 0 \\ 0 & (1-\delta)^n \end{pmatrix}.P^{-1}.\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

C.2.c. En déduire qu'il existe des coefficients complexes U_+,U_-,V_+,V_- tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{lcl} u_n &=& U_+(1+\delta)^n+U_-(1-\delta)^n \\ v_n &=& V_+(1+\delta)^n+V_-(1-\delta)^n \end{array}\right.$$

C.3. On cherche à obtenir une autre expression de u_n et v_n en fonction de n. On note comme précédemment I la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $\delta=\mathrm{i}\sqrt{\alpha.\beta}$ et $\rho e^{i\theta}=1+\delta$avec $\rho>0$ et $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

C.3.a. Démontrer que $\alpha.\beta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$.

C.3.b. En déduire que $(A-I)^2=-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}I$.

C.3.c. Démontrer enfin, par récurrence sur n, que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=\frac{1}{\sin(\theta)\cos^n(\theta)}(\cos(\theta)\sin(n\theta)A-\sin((n-1)\theta)I).$$

C.4.a. On considère (a_n) et (b_n) les suites de termes généraux $a_n=\sin(\theta)\cos^n(\theta)u_n$ et $b_n=\sin(\theta)\cos^n(\theta)v_n$ Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\frac{-v_0.a_n+u_0.b_n}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{+\beta.u_0.a_n+\alpha.v_0.b_n}{\sin\theta}\right)^2=(\alpha.v_0^2+\beta.u_0^2)^2$$

C.4.b. Les résultats obtenus vous paraissent-ils conformes à l'hypothèse simplificatrice faite en C.2 ?

Correction DS 05

Correction Ex.–1

Partie A
Résultats préliminaires

A.1.a. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \ln(x) - x + 1$. La fonction f ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x > 0,\, f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On a donc $\forall x > 1$, $f'(x) < 0$, $\forall x, 0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ et $f'(1) = 0$.

On en déduit le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f que l'on complète par la valeur $f(1) = 0$ et par les limites

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x.\left(-1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = -\infty,$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit que :

$$\forall x > 0,\, f(x) \leq 0$$

ce qui est l'inégalité demandée.

A.1.b. Il s'agit de démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad a.f\left(\frac{b.y}{a}\right) \leq -d.f\left(\frac{c.x}{d}\right)$$

ce qui est évident car, par la question précédente, l'expression à gauche est négative alors que celle de droite est positive. On a donc :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad a.\left(\ln\left(\frac{b.y}{a}\right) - \frac{b.y}{a} + 1\right) \leq d\left(-\ln\left(\frac{c.x}{d}\right) + \frac{c.x}{d} - 1\right).$$

A.2. Soient $(x_0,x_1,x_2)\in\mathbb{C}^3$, $A=\begin{pmatrix} x_0 & x_1\\ x_2 & x_0\end{pmatrix}$ et I la matrice identité dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

A.2.a. Soit un nombre complexe λ, la matrice $A-\lambda.I$ n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul, *i.e.*

$$\det(A-I)=\begin{vmatrix} x_0-\lambda & x_1\\ x_2 & x_0-\lambda\end{vmatrix}=(x_0-\lambda)^2-x_1.x_2=0 \text{ } i.e. \text{ } (x_0-\lambda)^2=x_1.x_2.$$

A.2.b. Le déterminant de P est $\begin{vmatrix} \delta & -\delta\\ x_2 & x_2\end{vmatrix}=2.x_2.\delta\neq 0$. La matrice P est donc inversible.

On a

$$A.P_+=\begin{pmatrix} x_0 & x_1\\ x_2 & x_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \delta\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0.\delta+x_1.x_2\\ x_2.\delta+x_0.x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x_0+\delta).\delta\\ (\delta+x_0).x_2\end{pmatrix}=(\delta+x_0).P_+$$

et

$$A.P_-=\begin{pmatrix} x_0 & x_1\\ x_2 & x_0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -\delta\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_0.\delta+x_1.x_2\\ -x_2.\delta+x_0.x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x_0-\delta).(-\delta)\\ (-\delta+x_0).x_2\end{pmatrix}=(-\delta+x_0).P_-$$

On a donc obtenu, en posant

$$D=\begin{pmatrix} x_0+\delta & 0\\ 0 & x_0-\delta\end{pmatrix}$$

que $A.P=P.D$ et donc que $P^{-1}.A.P$ est la matrice diagonale D.

Partie B

Un système différentiel

Soient $t_0\in,\mathbb{R}_+$, $\widetilde{x_0},\widetilde{y_0}\in\mathbb{R}$. On considère le système différentiel ($\mathscr{S}_1$) ci-dessous :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_0)=\widetilde{x_0}\\ y(t_0)=\widetilde{y_0}\\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & (a-b.y(t)).x(t)\\ y'(t) & = & (c.x(t)-d).y(t)\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_1)$$

B.1. Soient $t_0\in\mathbb{R}_+$ et $(\widetilde{x_0},\widetilde{y_0})\in\mathbb{R}^2$.

B.1.a. Supposons que $\widetilde{x_0}=0$ et considérons $\left(x:t\mapsto 0, y:t\mapsto \widetilde{y_0}.e^{-d.(t-t_0)}\right)$.

On a

$$x(t_0)=\widetilde{x_0} \text{ et } \forall t\in\mathbb{R}_+, x'(t)=0=(a-b.y(t)).x(t)$$

et

$$y(t_0)=\widetilde{y_0}.e^{-d.0}=\widetilde{y_0} \text{ et } \forall t\in\mathbb{R}_+, y'(t)=-d.\widetilde{y_0}.e^{-d.(t-t_0)}=-d.y(t)=(c.x(t)-d).y(t)$$

On en déduit que (x,y), couple de fonctions dans $(\mathscr{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))^2$, est solution du problème ($\mathscr{S}_1$). C'en est l'*unique* solution par le théorème admis.

Maintenant si, avec $\widetilde{x_0}$ quelconque, $\widetilde{y_0}=0$, de façon symétrique (on ajuste les constantes et les signes), on considére $\left(x:t\mapsto \widetilde{x_0}.e^{+a.(t-t_0)}, y:t\mapsto 0\right)$,

On a

$$x(t_0)=\widetilde{x_0} \text{ et } \forall t\in\mathbb{R}_+, x'(t)=+a.\widetilde{x_0}.e^{+a.(t-t_0)}=(a-b.y(t)).x(t)$$

et

$$y(t_0)=0=\widetilde{y_0} \text{ et } \forall t\in\mathbb{R}_+, y'(t)=0=(c.x(t)-d).y(t)$$

On en déduit que (x,y) est solution du problème ($\mathscr{S}_1$) avec ces données initiales. C'en est l'*unique* solution par le théorème admis.

B.1.b. Si un couple (x,y) de solution de du problème $(\mathscr{S}_1)$ est constant alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, x(t) = x(t_0) = \widetilde{x_0} \text{ et } y(t) = y(t_0) = \widetilde{y_0}$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, x'(t) = 0 \text{ et } y'(t) = 0$$

et donc (en insérant ces expressions de $x(t), y(y), x'(t), y'(t)$ dans le système $(\mathscr{S}_1)$), il vient

$$\forall t \geq 0, \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & (a - b.\widetilde{y_0}).\widetilde{x_0} \\ 0 & = & (c.\widetilde{x_0} - d).\widetilde{y_0} \end{array} \right.$$

Ceci équivaut à

$$(\widetilde{x_0}, \widetilde{y_0}) = (0,0) \text{ ou } (\widetilde{x_0}, \widetilde{y_0}) = (\frac{d}{c}, \frac{b}{a})$$

Ces deux couples sont les seules solutions constantes du système.

B.2. On suppose dorénavant que $\widetilde{x_0} > 0$ et $\widetilde{y_0} > 0$.

B.2.a. Si (x,y) est solution de $(\mathscr{S}_1)$ et (par l'absurde), soit x, soit y s'annule.

Supposons pour fixer les idées que ce soit y. Il existe alors un instant t_1 tel que $y(t_1) = 0$ mais alors, par l'unicité des solutions du système $(\mathscr{S}_1)$, en considérant t_1 comme instant initial et $\widetilde{y_1} = 0$ comme valeur initiale pour y, on obtient par B.1.a, deuxième partie, que y est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $x : t \mapsto \widetilde{x_1} e^{+a(t-t_1)}$. On aurait donc $y(t_0) = 0 = \widetilde{y_0}$, ce qui est une contradiction.

Le même argument vaut si x s'annule en un certain instant t_1. On obtiendrait par unicité que :

$$\forall t \geq 0, x(t) = 0 \text{ et } y(t) = \widetilde{y_1} e^{-d(t-t_1)}$$

ce qui est impossible car $x(t_0) \neq 0$.

B.2.b. Si (x,y) est solution de $(\mathscr{S}_1)$ ni x ni y ne peut prendre une valeur ≤ 0. Sinon, par l'absurde, il existerait $t_2 \geq 0$ tel que soit $x(t_2) \leq 0$, soit $y(t_2) \leq 0$. Supposons, pour fixer les idées, que $x(t_2) \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à x, fonction continue sur le segment $[t_0, t_2]$ (noter que l'on ne sait pas si t_2 est $\leq t_0$ ou $\geq t_0$, ce n'est pas grave, c'est un segment géométrique) vérifiant $x(t_0) = \widetilde{x_0} > 0$ et $x(t_2) \leq 0$, il existerait t_1 entre t_0 et t_2 tel que $x(t_1) = 0$. On a montré précédemment que c'était impossible et on obtient une contradiction.

En conclusion, x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

B.3. On note $\varphi \in \mathscr{F}\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \mathbb{R} \right)$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \varphi(x,y) = c.x - d.\ln(x) + b.y - a.\ln(y).$$

On admet que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'elle admet au moins un extremum.

B.3.a. On a :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = c - \frac{d}{x} = \frac{c.x - d}{x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = b - \frac{a}{y} = \frac{b.y - a}{y}.$$

B.3.b. En un extremum (sur le pavé *ouvert* $(\mathbb{R}_+^*)^2$), les deux dérivées partielles s'annulent (le point est dit *critique*) et donc s'il y a un extremum en $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$c.x - d = 0 \text{ et } b.y - a = 0 \textit{ i.e. } (x,y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right).$$

Donc il y a au plus un point en lequel φ admet un extremum (reste à démontrer que c'est un extremum, *cf.* question suivante, pas besoin d'admettre l'existence d'un tel extremum)

B.3.c. Posons
$$(x_*, y_*) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$$
le point critique trouvé à la question précédente. On a
$$\varphi(x_*, y_*) = d(1 - \ln\frac{d}{c}) + a(1 - \ln\frac{a}{b})$$
et, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:
$$\begin{array}{rcl} \varphi(x,y) - \varphi(x_*, y_*) & = & d\left(\frac{c.x}{d} - 1 - \ln\frac{c.x}{d}\right) + a\left(\frac{b.y}{a} - 1 - \ln\frac{b.y}{a}\right) \\ \textbf{[par Q.A.1.b]} & \geq & 0 \end{array}$$
Ceci montre que
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \varphi(x,y) \geq \varphi(x_*, y_*)$$
et donc qu'il y a un minimum en (x_*, y_*).

B.4. Soit (x,y) un couple solution de $(\mathscr{S}_1)$.

Posons, pour $t \in \mathbb{R}_+$,
$$e(t) = \varphi(x(t), y(t))$$
Par composition (rappelons que (x,y), $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, est à valeurs dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, pavé ouvert sur lequel φ est de classe $\mathscr{C}^1$), la fonction e ainsi définie est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et on a, $\forall t \in_R^+$,
$$\begin{array}{rcl} e'(t) & = & \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ \textbf{[par Q. B.3.a]} & = & \frac{c.x(t) - d}{x(t)}x'(t) + \frac{b.y(t) - a}{y(t)}y'(t) \\ \textbf{[}(x,y)\textbf{ solution de }(\mathscr{S}_1)\textbf{]} & = & \frac{c.x(t) - d}{x(t)}x(t).(a - b.y(t)) + \frac{b.y(t) - a}{y(t)}y(t).(c.x(t) - d) \\ & = & (c.x(t) - d).(a - b.y(t)) + (b.y(t) - a).(c.x(t) - d) \\ & = & 0 \end{array}$$
On en déduit que la fonction e est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ car sa dérivée y est nulle.

Partie C
Un modèle discret

On se propose donc d'utiliser un modèle discret selon lequel x_n désigne l'effectif de cette population de bactéries et y_n celui de cette population de protozoaires en fonction de n, nombre de jours écoulés depuis un instant initial correspondant à $n = 0$. On fait les hypothèses suivantes :

C.1. Reprenons les hypothèses précédentes pour les transformer en équations :

— À l'instant $n = 0$, « l'effectif des bactéries est égal à $\widetilde{x_0}$ » se traduit en

$$x_0 = \widetilde{x_0}.$$

— « les bactéries se développent selon un taux journalier de natalité égal à a et les bactéries meurent selon un taux journalier de mortalité égal à $b.y_n$ » se traduit en

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = \alpha_n.x_n$$

où α_n est par définition le taux de reproduction (démographique) des bactéries d'un jour n sur le suivant, le jour $n+1$. Ce taux comporte deux composantes :

$$\alpha_n = \underbrace{a}_{\text{tx de natalité}} - \underbrace{b.y_n}_{\text{tx de mortalité}} .$$

On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = (a - b.y_n).x_n.$$

De façon symétrique, analysons les équations restantes pour les transformer en hypothèses sur développement des protozoaires, dont l'effectif au jour n est noté y_n :

— $y_0 = \widetilde{y_0}$ traduit le fait qu'à l'instant (jour) $n = 0$, l'effectif des protozoaires est de $\widetilde{y_0}$;

— $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n = (c.x_n - d).y_n$ traduit le fait combiné :

  — les protozoaires se développent selon un taux journalier de natalité égal à $c.x_n$;

  — les protozoaires meurent selon un taux journalier de mortalité égal à d.

NB : On aura reconnu là l'établissement d'un système (discret) d'évolution proie-prédateur[2], à la LOTKA-VOLTERRA. Le système différentiel de la partie C en est l'analogue continu.

C.2. On considère dorénavant que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = x_n - \frac{d}{c}$ et $v_n = y_n - \frac{a}{b}$ sont bornées et que les quantités $b.u_n.v_n$ et $c.u_n.v_n$ sont négligeables devant u_n et v_n.

On a

$$x_{n+1} - x_n = u_{n+1} - u_n,\ y_{n+1} - y_n = v_{n+1} - v_n,\ x_n = u_n + \frac{d}{c} \text{ et } y_n = v_n + \frac{a}{b}.$$

C.2.a. Le système $(\mathscr{S}_2)$ s'écrit en termes de u_n, v_n

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \widetilde{x_0} - \frac{d}{c} \\ v_0 = \widetilde{y_0} - \frac{a}{b} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} - u_n &=& (a - b.(v_n + \frac{a}{b})).(u_n + \frac{d}{c}) = -\frac{b.d}{c}.v_n - b.v_n.u_n \\ v_{n+1} - v_n &=& (c.(u_n + \frac{d}{c}) - d).(v_n + \frac{a}{b}) = +\frac{a.c}{b}u_n + c.u_n.v_n \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_2)$$

c'est à dire, en posant $\alpha = \frac{b.d}{c}$ et $\beta = \frac{a.c}{b}$,

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \widetilde{x_0} - \frac{d}{c} \\ v_0 = \widetilde{y_0} - \frac{a}{b} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} &=& +u_n - \alpha.v_n - b.v_n.u_n \\ v_{n+1} &=& +\beta.u_n + v_n + c.u_n.v_n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2. ici, les protozoaires sont les prédateurs, les bactéries, les proies est-ce correct biologiquement ? C'est un problème G2E, c'est à vérifier...

L'hypothèse de négligeabilité permet de le réécrire :

$$\begin{cases} u_0 = \widetilde{x_0} - \frac{d}{c} \\ v_0 = \widetilde{y_0} - \frac{a}{b} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= +(1+o(1))u_n - \alpha.v_n \\ v_{n+1} &= +\beta.u_n + (1+o(1))v_n \end{cases} \end{cases}$$

et finalement, sous cette hypothèse, on voit qu'il est tout à fait possible que le système simplifié

$$\begin{cases} u_0 = \widetilde{x_0} - \frac{d}{c} \\ v_0 = \widetilde{y_0} - \frac{a}{b} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= +u_n - \alpha.v_n \\ v_{n+1} &= +\beta.u_n + v_n \end{cases} \end{cases} \qquad (\mathscr{S}_3)$$

mène l'évolution.

Il faudra bien sûr une fois l'évolution principale suggérée étudiée, la comparer au système initial ($\mathscr{S}_2$). Ce sujet n'aborde cette question qu'à la toute fin.

En écrivant les choses matriciellement, il vient que ($\mathscr{S}_3$) définit une suite récurrente vectorielle qui s'écrit matriciellement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

Une récurrence de type géométrique (**à rédiger le jour le concours : 3 lignes !**) donne que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n. \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

C.2.b. Soit $\delta = \mathrm{i}\sqrt{\alpha.\beta}$, ce qui est légitime car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On a

$$\delta^2 = -\alpha.\beta$$

et donc, en écrivant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_0 \end{pmatrix},$$

on a $\delta^2 = x_1.x_2 \neq 0$ et les résultats de la question A.2, montrent que, en posant :

$$P = \begin{pmatrix} \delta & -\delta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1+\delta & 0 \\ 0 & 1-\delta \end{pmatrix},$$

la matrice P est inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice D est diagonale et on a

$$A = P.D.P^{-1}.$$

Par une récurrence (**A rédiger ! 3 lignes !**) simple, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P.D^n.P^{-1} = P. \begin{pmatrix} (1+\delta)^n & 0 \\ 0 & (1-\delta)^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

et donc, par C.2.a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} (1+\delta)^n & 0 \\ 0 & (1-\delta)^n \end{pmatrix} .P^{-1}. \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

C.2.c. En développant le produit matriciel ci-dessus (si on veut être vraiment démonstratif, on peut poser $P^{-1}. \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$), on voit que les deux composantes du vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ sont combinaisons linéaires (avec coefficients independants de n) des deux éléments diagonaux de D^n, c'est à dire que le calcul développé montre qu'il existe des coefficients complexes U_+, U_-, V_+, V_- tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n &= U_+(1+\delta)^n + U_-(1-\delta)^n \\ v_n &= V_+(1+\delta)^n + V_-(1-\delta)^n \end{cases}$$

Ces coefficients (complexes) sont combinaisons algébriques (somme, produits) de $\beta, \delta, \lambda, \mu$.

C.3. On cherche à obtenir une autre expression de u_n et v_n en fonction de n. On note comme précédemment I la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $\delta = \mathrm{i}\sqrt{\alpha.\beta}$ et $\rho e^{i\theta} = 1+\delta$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
C.3.a. On a

$$1+\mathrm{i}\sqrt{\alpha.\beta} = \delta \quad = \quad \rho e^{i\theta} = \rho\cos(\theta) + \rho\mathrm{i}\sin\theta$$

En identifiant parties réelle et imaginaire,

$$\rho\cos(\theta) - = 1 \text{ et } \sqrt{\alpha.\beta} = \rho.\sin\theta$$

et on en déduit que $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta \neq 0$ et

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta} \text{ et } \sqrt{\alpha.\beta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

et donc, en prenant le carré de cette dernière identité :

$$\alpha.\beta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.$$

C.3.b. On a

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha.\beta \\ -\alpha.\beta & 0 \end{pmatrix} = -\alpha.\beta.I,$$

et finalement, par la question précédente, $(A-I)^2 = -\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}I$.
C.3.c. L'identité précédente, après développement donne :

$$A^2 = 2.A - \left(1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right).I = 2.A - \frac{1}{\cos^2(\theta)}.I$$

c'est à dire, en utilisant l'identité trigonométrique $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$:

$$A^2 = \frac{1}{\sin(\theta)\cos^2(\theta)}\left(\cos(\theta)\sin(2\theta).A - \sin(\theta).I\right).$$

Ceci est l'identité demandée pour $n = 2$.

Supposons que pour un certain entier $n \geq 2$, on ait :

$$A^n = \frac{1}{\sin(\theta)\cos^n(\theta)}(\cos(\theta)\sin(n\theta)A - \sin((n-1)\theta)I).$$

En multipliant par A, on obtient donc

$$A^{n+1} = \frac{1}{\sin(\theta)\cos^n(\theta)}(\cos(\theta)\sin(n\theta)A^2 - \sin((n-1)\theta)A).$$

En remplaçant A^2 par la combinaison de A et I trouvée précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= \frac{1}{\sin(\theta)\cos^n(\theta)}\left[\cos(\theta)\sin(n\theta).\frac{1}{\sin(\theta)\cos^2(\theta)}\left(2\cos^2(\theta)\sin(\theta).A - \sin(\theta).I\right) - \sin((n-1)\theta)A\right] \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)\cos^n(\theta)}\left[\left(2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)\right).A - \frac{\sin(n\theta)}{\cos(\theta)}.I\right] \\
&= \frac{1}{\sin(\theta)\cos^{n+1}(\theta)}\left[\cos(\theta)\left(2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)\right).A - \sin(n\theta).I\right]
\end{aligned}$$

.

Or,

$$\begin{aligned}
\sin((n-1)\theta) &= \sin(n\theta).\cos(\theta) - \sin(\theta).\cos(n\theta)\\
\sin((n+1)\theta) &= \sin(n\theta).\cos(\theta) + \sin(\theta).\cos(n\theta)
\end{aligned}$$

et donc

$$\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2\cos(\theta).\sin(n\theta)$$

et en remplaçant, dans lexpression obtenue précédemment pour A^{n+1}

$$(2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)) \text{ par } \sin((n+1)\theta)$$

on obtient finalement

$$A^{n+1} = \frac{1}{\sin(\theta)\cos^{n+1}(\theta)}\left[\cos(\theta)\sin((n+1)\theta).A - \sin(n\theta).I\right].$$

Ceci est la formule cherchée au rang $n+1$.

Par récurrence, on a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow A^n = \frac{1}{\sin(\theta)\cos^n(\theta)}(\cos(\theta)\sin(n\theta)A - \sin((n-1)\theta)I).$$

Il est clair que cette formule est aussi correcte pour $n = 1$ (elle se simplifie en $A = A$ car $\sin(0.\theta) = 0$) et pour $n = 0$ (elle se réduit alors en $I = I$).

C.4.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta) = \sin(\theta)\cos(n.\theta)$$

et donc

$$\cos(\theta)\sin(n\theta)A - \sin((n-1)\theta)I = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(n.\theta) & -\alpha.\cos(\theta)\sin(n.\theta) \\ +\beta.\cos(\theta)\sin(n.\theta) & \sin(\theta)\cos(n.\theta) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \sin(\theta)\cos^n(\theta).\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= (\cos(\theta)\sin(n\theta)A - \sin((n-1)\theta)I).\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(n.\theta)u_0 - \alpha.\cos(\theta)\sin(n.\theta)v_0 \\ +\beta.\cos(\theta)\sin(n.\theta)u_0 + \sin(\theta)\cos(n.\theta)v_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $a_n = \sin(\theta)\cos^n(\theta)u_n$ et $b_n = \sin(\theta)\cos^n(\theta)v_n$, on a

$$-v_0.a_n + u_0.b_n = (\alpha.v_0^2 + \beta.u_0^2).\cos(\theta)\sin(n.\theta),\ +\beta.u_0.a_n + \alpha.v_0.b_n = (\alpha.v_0^2 + \beta.u_0^2).\cos(n\theta)\sin(\theta)$$

et finalement, comme $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{-v_0.a_n + u_0.b_n}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{+\beta.u_0.a_n + \alpha.v_0.b_n}{\sin\theta}\right)^2 = (\alpha.v_0^2 + \beta.u_0^2)^2.$$

C.4.b. Si les hypothèses simplificatrices faites en C.2 sont correctes, les suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ devraient être bornées et comme $\sin(\theta)\cos(\theta)^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, (a_n) et (b_n) devraient avoir pour limite 0.

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'identité de la question précédente, on obtiendrait

$$0 = (\alpha.v_0^2 + \beta.u_0^2)^2$$

ce qui ne peut être réalisé que si $u_0 = v_0 = 0$.

Les hypothèses faites en C.2 ne sont donc pas du tout pertinentes, concernant l'évolution à long terme et même pour du moyen terme (explosion exponentielle).

Il est à noter qu'une discrétisation par un schéma d'EULER direct du système différentiel de LOTKA–VOLTERRA (ce qu'est le système $(\mathscr{S}_2)$ au système $(\mathscr{S}_1)$) mène à des suites non bornées du fait de la convexité des ensembles de sous-niveau de la fonction d'énergie φ. Ceci explique cela.