Devoir Surveillé 07

Le samedi 9 mars 2024
durée 3h00

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits
La plus grande attention sera apportée à la qualité de la rédaction, syntaxe et orthographe comprise.
Numérotez les copies et questions et soulignez ou encadrez les résultats.
Vous pouvez utiliser les résultats des questions en amont d'une question donnée en la référençant clairement
Les calculs, même longs et fastidieux doivent figurer sur la copie

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez la composition.

Ces deux problèmes portent sur des problèmes d'évolution de population similaires sans être identiques : dans l'un, l'effectif total de la population peut varier, dans l'autre, l'effectif total de la population est fixé.

Les deux problèmes sont indépendants même si les techniques utilisées sont similaires. Le premier est dans un esprit directement tourné vers une application numérique, le second dans un esprit plus abstrait propice à une programmation informatique.

Problème I

On rappelle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices a p lignes et p colonnes et à coefficients réels. Par convention, si $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ alors M^0 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. On s'intéresse à deux populations d'oiseaux notées $\mathscr{P}_1$ (étudiée dans la partie A) et $\mathscr{P}_2$ (étudiée dans la partie B). Dans chacune de ces populations, la moitié sont des oiselles (c'est-à-dire des femelles) et on modélise l'évolution de l'effectif de ces oiselles en fonction de n, le nombre d'années écoulées depuis un instant initial correspondant à $n = 0$.

Ces deux parties peuvent être abordées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Premier exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

A.1. Soient les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \frac{3}{20} & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

A.1.a. Calculer $\det(P)$ puis P^{-1}.
A.1.b. Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice diagonale D telle que $A = P.D.P^{-1}$.
A.2. Les oiselles de $\mathscr{P}_1$ sont classées en deux catégories :

- les oiselles jeunes, âgées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté j_n.
- les oiselles adultes, âgées d'au moins un an. L'effectif des oiselles adultes est noté a_n.

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

- chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne a une oiselle pendant sa première année de vie et a 5 oiselles pendant sa deuxième année.
- 15% des oiselles survivent au dela de leur première année mais jamais au dela de leur seconde année.

On note :

$$X_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } X'_n = P^{-1}.X_n.$$

A.2.a. Justifier que $X_{n+1} = A.X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
A.2.b. En déduire une expression de X'_n en fonction de X'_0, n, P et D. On rédigera une démonstration par récurrence.
A.2.c. En supposant j_0 et a_0 non nuls, démontrer que j_n et a_n sont équivalents à des termes généraux de suites géométriques.

Partie B

Second exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

B.1. Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

B.1.a. Déterminer les valeurs propres de B. On donnera ensuite une base de chaque espace propre composée de vecteur(s) ne comportant que des coefficients entiers.Est-il possible de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de B ?

B.1.b. On pose

$$Q = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est inversible.

B.1.c. Démontrer que $Q^{-1}.B.Q = T$ où :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice T est-elle diagonalisable ?

B.1.d. Déterminer T^n a l'aide de la formule du binôme de NEWTON.

B.2. Les oiselles de $\mathscr{P}_2$ sont classées en trois catégories :

- les oiselles jeunes, agées de moins d'un an. L'effectif des oiselles jeunes est noté J_n.
- les oiselles préadultes, agées d'entre un et deux ans. L'effectif des oiselles préadultes est noté P_n.
- les oiselles adultes, agées d'au moins deux ans. L'effectif des oiselles adultes est noté A_n.

Une étude sur le terrain a permis de conclure que :

- une oiselle de moins d'un an n'est pas féconde.
- chaque oiselle donne, en moyenne, naissance a 4 oiselles durant sa deuxième année de vie et autant pendant sa troisième année.
- 75% des oiselles survivent au dela de leur première année.
- les deux tiers des oiselles vivantes à la fin de la deuxième année survivent, mais jamais au dela de la troisième année.

B.2.a. Établir une relation entre la matrice colonne de coefficients J_{n+1}, P_{n+1} et A_{n+1} et la matrice colonne de coefficients J_n, P_n et A_n puis en déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = Q.T^n.Q^{-1}. \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

B.2.b. En déduire enfin qu'il existe (on ne demande surtout pas de les expliciter) trois matrices C_1, C_2 et C_3 appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = (2^n.C_1 + (-1)^n.C_2 + n(-1)^n.C_3) \begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

B.3. On note S_n l'effectif total des oiselles de $\mathscr{P}_2$, on admet que J_0, A_0 et P_0 sont non nuls et que :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{32}{27} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

B.3.a. Démontrer que les suites (J_n), (P_n) et (A_n) divergent vers $+\infty$.

B.3.b. Calculer $\mathrm{rg}(C_1)$ puis déterminer également les limites des suites $(\frac{J_n}{S_n})$, $(\frac{P_n}{S_n})$ et $(\frac{S_{n+1}}{S_n})$.

Problème II

Modèle de LESLIE conservatif

Le modèle de LESLIE conservatif est un modèle d'évolution de la structure d'une population dont l'effectif global ne change pas au cours du temps. Chaque individu de la population est dans un certain état (en démographie ou en biologie, pour une population vivante, ce peut être l'âge ou le stade d'évolution, en physique nucléaire, pour une population de noyaux atomiques soumise à bombardement neutronique, ce peut être le type isotopique). Le scénario est le suivant

— Les états sont numérotés E_0 (état fondamental), $E_1, \dots, E_{K-1}$ (états supérieurs) et E_K (état ultime)

— A chaque pas de temps, pour chaque état E_k à l'exception de l'état ultime, une proportion $s_k \in]0,1]$ de la population dans cet état passe à l'état suivant alors que la proportion $1-s_k$ retourne à l'état fondamental.

— A chaque pas de temps, la population dans l'état ultime E_K repasse intégralement à l'état fondamental E_0. En un sens, cela revient à considérer que $s_K = 0$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, K\}$, $p_{n,k}$ l'effectif de la population dans l'état k à l'instant n,

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{n,0} \\ p_{n,1} \\ \vdots \\ p_{n,K} \end{pmatrix},$$

le vecteur de $\mathbb{R}^{K+1}$ codant la structure de la population à l'instant n.

On a donc, P_0, la structure de la population à l'instant initial étant donnée, la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = L.P_n$$

où

$$L = \begin{pmatrix} 1-s_0 & 1-s_1 & 1-s_2 & \dots & 1-s_{K-1} & 1 \\ s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & s_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & s_{K-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Partie A

Propriétés spectrales de la matrice L

A.1. Quel est le rang de L ? 0 est-il valeur propre de L ?

A.2. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \sum_{k=0}^{K} p_{n,k}$ l'effectif total de la population. Vérifier que $t_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.P_n$, calculer $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.L$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = t_0$.

A.3.a. Montrer qu'en tout généralité, une matrice carrée A et sa transposée $A^\top$ ont mêmes valeurs propres.

Indication:On pourra baser le raisonnement sur le fait qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si sa transposée l'est

A.3.b. En déduire, sans calcul supplémentaire, que 1 est valeur propre de L.

A.4. On pose, pour $k \in \{1, \dots, K\}$, $\pi_k = \prod_{\ell=0}^{k-1} s_\ell$, $\pi_0 = 1$ et $\Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_K \end{pmatrix}$. Montrer que E_1, l'espace propre de L associé à 1 est de dimension 1 et $E_1 = \operatorname{Vect}\langle \Pi \rangle$.

A.5. On rappelle qu'on a posé $s_K = 0$ et donc que $1 - s_K = 1$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de L si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{\lambda^{k+1}} = 1$$

En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de L alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{|\lambda|^{k+1}} \geq 1$.

On admet qu'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si λ est réel positif.

A.6. Donner sens de variation et limites aux bornes du domaine de définition de la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, F(x) = \sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{x^{k+1}}$$

En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, est valeur propre de L alors $|\lambda| < 1$.

Partie B

Etude asymptotique de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On suppose dans toute cette partie que L est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et on note $Q \in \mathscr{M}_{K+1}(\mathbb{C})$ une matrice inversible telle que $Q^{-1}.L.Q$ vaut D, une matrice *diagonale*. On suppose que la première colonne de Q est donnée par le vecteur Π défini à la question A.4.

B.1. Démontrer– par une récurrence rédigée– que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = Q.D^n.Q^{-1}.P_0$$

et donner la forme de D^n

B.2. Décrire la limite lorsque $n \to +\infty$ de chaque entrée de la matrice D^n.

⋆⋆⋆

On signale que, par une légère extension de la notion de limite, on dit qu'une suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ « admet un nombre complexe ℓ pour limite lorsque $n \to +\infty$ » si la suite à valeurs réelles $(|z_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite 0. Comme la notion de limite des suites réelles, cette notion de limite est « compatible » avec les opérations algébriques habituelles sur les limites : sommes/différences/produits.

⋆⋆⋆

B.3. Argumenter en faveur du résultat suivant : Lorsque $n \to +\infty$, chaque composante de P_n admet une limite (dans $\mathbb{C}$) et celle-ci est la composante correspondante du vecteur $P_\infty = \frac{t_0}{\sigma}.\Pi$ où σ est le nombre, seul composante de la matrice 1×1 : $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.\Pi$. C'est à dire

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.\Pi \text{ et } P_\infty = \frac{t_0}{\sigma}.\Pi.$$

Partie C

Implémentation informatique

On cherche à développer les outils pour implémenter informatiquement dans un script Python les calculs liés au modèle d'évolution de LESLIE décrit précédemment.

Les bibliothèques usuelles sont importées en début de script sous la forme

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

C.1. Ecrire une fonction Python d'entête `Leslie(S)`, qui étant donné une liste Python `S` contenant les K valeurs $s_0, \dots, s_{K-1}$ retourne la matrice L sous forme de tableau Numpy de type `ndarray` de `shape` $(K+1, K+1)$.

C.2. Ecrire une fonction Python d'entête `VP(S)`, qui étant donné la liste Python `S` décrite en C.1 retourne le vecteur Π du texte calculé pour ces valeurs des s_k forme de `ndarray` de `shape` $(K+1,)$.

C.3. Pour n un entier Python quelconque représenté en machine par `n`, de type `int`, L une matrice carrée représentée par un tableau `L` Numpy de type `ndarray` de `shape` (K, K), peut-on calculer L^n par l'instruction `L**n` ? Sinon, que calcule cette instruction ?

C.4. On propose l'extrait de script à analyser en fin de question.

C.4.a. Expliquer ce que calcule la boucle contenant l'instruction `P`, comment, à partir de quelles données et ce que contient `P` en sortie de boucle.

C.4.b. Expliquer ce qui est calculé dans la variable `Pinfini`, comment, à partir de quelles données. Peut-on comparer les valeurs de `P` et de `Pinfini`.

```
L = Leslie(S) #S est donné juste avant
P0 = np.array([0.5, 0.2, 0.2, 0.1])
P = P0
for k in range(50) :
    P = np.dot(L, P)

vp, vecp = np.linalg.eig(L)
#la plus grande vp en module est en vp[0]
#le vec. propre correspodant est en vecp[:,0]
t0  = P0.sum()
sigma = vecp[:, 0].sum()
Pinfini = t0/sigma*vecp[:, 0]
```

C.5. On a perdu tous nos scripts, toutes nos données patiemment récupérées (la liste `S`) et on a juste retrouvé, rescapée de l'imprimante en feu, la valeur du vecteur `Pinfini` suivante. Expliquer par des mots ou un bout de script comment tout retrouver : population totale t_0, valeurs des s_k.

```
Pinfini =  [0.88809947+0.j 0.08880995+0.j 0.01776199+0.j 0.0053286 +0.j]
```

Les retrouver [1]

1. si vous avez le temps...ahah

PYTHON
AGRO-VETO
2020

Listes

`[]` --------	Créer une liste vide
`[a]*n` -----	Créer une liste avec n fois l'élément `a`
`L.append(a)`	Ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`
`L1 + L2` ---	Concatène les deux listes `L1` et `L2`
`len(L)` ----	Renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`
`L.pop(k)` --	Renvoie l'élément d'indice k de `L` et l'enlève de `L`
`L.remove(a)`	Enlève une fois la valeur `a` de la liste `L`
`max(L)` ----	Renvoie le plus grand élément de la liste `L`
`min(L)` ----	Renvoie le plus petit élément de la liste `L`
`sum(L)` ----	Renvoie la somme de tous les éléments de la liste `L`

Numpy

`import numpy as np`

`np.array()` -------------	Transforme une liste en matrice `numpy`
`np.linspace(a,b,n)` -----	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus)
`np.zeros([n,m])` --------	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$
`np.eye(n)` --------------	Crée la matrice identité de taille n
`np.diag(L)` -------------	Crée la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les éléments de la liste `L`
`np.transpose(M)` --------	Renvoie la transposée de M
`np.dot(M,P)` ------------	Renvoie le produit matriciel MP
`np.sum(M)` --------------	Renvoie la somme de tous les éléments de M
`np.prod(M)` -------------	Renvoie le produit de tous les éléments de M
`np.max(M)` --------------	Renvoie le plus grand élément de M
`np.min(M)` --------------	Renvoie le plus petit élément de M
`np.shape(M)` ------------	Renvoie dans un couple le format de la matrice M
`np.size(M)` -------------	Renvoie le nombre d'éléments de M

Numpy.linalg

`import numpy.linalg as la`

`la.inv(M)` --------------	Renvoie l'inverse de la matrice M si elle est inversible
`la.eigvals(M)` ----------	Renvoie la liste des valeurs propres de M
`la.eig(M)` --------------	Renvoie un couple `L,P` où `L` est la liste des valeurs propres de M et `P` la matrice de passage associée
`la.matrix_rank(M)` -------	Renvoie le rang de M

Random

`import numpy.random as rd`

`rd.rand()`----------	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$
`rd.randint(a,b)` ---	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b[\![)$
`rd.gauss(0,1)` -----	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
`rd.choice(L)` ------	Choisit aléatoirement un élément de la liste `L`

Math

`import numpy as np`

`np.atan(x)` -------	Renvoie $\arctan(x)$
`np.floor(x)` ------	Renvoie $\lfloor x \rfloor$
`np.factorial(n)` --	Renvoie $n!$ si $n \in \mathbb{N}$
`np.sqrt(x)` --	Renvoie $\sqrt{x}$ si $x \geq 0$
`np.log(x)` ---	Renvoie $\ln(x)$ si $x > 0$
`np.exp(x)` ---	Renvoie e^x

Logique

`a == b` ----	Teste l'égalité « $a = b$ »
`a != b` ----	Teste « $a \neq b$ »
`a < b` -----	Teste « $a < b$ »
`a <= b` ----	Teste « $a \leq b$ »
`a > b` -----	Teste « $a > b$ »
`a >= b` ----	Teste « $a \geq b$ »
`not A` -----	Renvoie la négation de A
`A and B` ---	Renvoie « A et B »
`A or B` ----	Renvoie « A ou B »
`True` ------	Constante booléenne « Vrai »
`False` -----	Constante booléenne « Faux »

Matplotlib.pyplot

`import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot(X,Y,'+-r')` ----	Génère la courbe des points définis par les listes `X` et `Y` (abscisses et ordonnées) avec les options : • symbole : `'.'` point, `'o'` rond, `'h'` hexagone, `'+'` plus, `'x'` croix, `'*'` étoile, ... • ligne : `'-'` trait plein, `'--'` pointillé, `'-.'` alterné, ... • couleur : `'b'` **bleu** , `'r'` **rouge** , `'g'` **vert** , `'c'` **cyan** , `'m'` **magenta** , `'k'` **noir** , ...
`plt.bar(X,Y)` ----------	Génère l'histogramme des points définis par les listes `X` et `Y` (abscisses et ordonnées)
`plt.axis('equal')` ------	Rend le repère orthonormé
`plt.xlim(xmin,xmax)` ----	Fixe les bornes de l'axe des abscisses
`plt.ylim(ymin,ymax)` ----	Fixe les bornes de l'axe des ordonnées
`plt.show()` ------------	Affiche le graphique

Cette liste est non exhaustive. Les candidats sont libres d'utiliser les commandes de leur choix.

Correction DS 07

Correction Ex.–1

Partie A
Premier exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

A.1. Soient les deux matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ \frac{3}{20} & 0\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}2 & 2\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

A.1.a. On a (formules du cours du la première, calcul facile pour seconde)

$$\det(P)=-2\frac{3}{5}-2\frac{1}{5}=-\frac{8}{5} \text{ et } P^{-1}=-\frac{5}{8}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -2\\ -\frac{1}{5} & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\frac{3}{8} & +\frac{5}{4}\\ +\frac{1}{8} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

A.1.b. On a

$$A.P=\begin{pmatrix}1 & 5\\ \frac{3}{20} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}=P.\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

En posant $D=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, on a donc $A=P.D.P^{-1}$ et A est diagonalisable de valeurs propres $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

A.2. Les oiselles de $\mathscr{P}_1$ sont classées en deux catégories :
On note :

$$X_n=\begin{pmatrix}j_n\\ a_n\end{pmatrix} \text{ et } X'_n=P^{-1}.X_n$$

A.2.a. De l'année n sur l'année $n+1$,

— Pour les jeunes oiselles, vu que chacune de ces oiselles donne naissance en moyenne a une oiselle pendant sa première année de vie et a 5 oiselles pendant sa deuxième année, on a

$$j_{n+1}=j_n+5.a_n$$

— Pour les oiselles adultes, vu que 15% des oiselles survivent au dela de leur première année mais jamais au dela de leur seconde année, on a

$$a_{n+1}=\frac{15}{100}j_n=\frac{3}{20}j_n$$

Matriciellement, ceci se réécrit $X_{n+1}=A.X_n$.

A.2.b. Ecrivons cette relation à l'aide de X'_n et X'_{n+1}. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P.X'_{n+1}=A.P.X'_n$$

et, en multipliant par P^{-1},

$$\forall n\in\mathbb{N}, X'_{n+1}=P^{-1}.A.P.X'_n=D.X'_n$$

Par la récurrence géométrique usuelle (**à réécrire ici car elle est explicitement demandée**[2]), on a donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, X_n=D^n.X'_0=.X'_0$$

2. Oui,oui, faites le ! ! !

A.2.c. Si j_0 et a_0 sont non nuls, comme, par la relation précédente, en repassant en X_n, X_0,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = P.D^n.P^{-1}.X_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{3}{40}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{40}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.X_0 = \dots$$

et donc, le dernier calcul fait, en négligeant $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ devant $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ comme [3]

$$\left(\frac{3}{4}.j_0 + \frac{5}{2}.a_0\right) \neq 0 \text{ et } \left(\frac{3}{40}.j_0 + \frac{1}{4}.a_0\right) \neq 0,$$

lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} j_n &\sim \left(\frac{3}{4}.j_0 + \frac{5}{2}.a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n \\ a_n &\sim \left(\frac{3}{40}.j_0 + \frac{1}{4}.a_0\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

.

Partie B

Second exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

B.1. Soit la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

B.1.a. On engage la recherche de valeurs propres. Un nombre complexe λ est v.p. de B ssi la matrice $B - \lambda.I_3$ est de rang ≤ 2. Par le pivot de Gauss, les matrices suivantes ont toutes même rang que $B - \lambda.I_3$.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow 4L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1}} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ -\lambda & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 + \lambda.L_1} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ 0 & 4(3-\lambda^2) & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2(3-\lambda^2).L_2} \begin{pmatrix} 3 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -3\lambda \\ 0 & 0 & 12 + 6\lambda(3-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Le nombre complexe λ est vp de B ssi $12 + 6\lambda(3-\lambda^2) = 0$, *i.e.*

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Les nombres 2 et -1 (avec multiplicité 2) sont les seules racines de ce polynôme, ce sont donc les deux seules valeurs propres de B.

Déterminons les espaces propres de B :

— v.p $\lambda = 2$. Pour déterminerE_2 le sev propre de B associé à 2, on résout l'équation $(B - 2I_3).X = 0$ d'inconnue X. En reprenant le pivot de Gauss effectué précédemment, cette équation, après avoir posé $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à

$$3x - 8y = 0 \text{ et } 2y - 6z = 0$$

et donc

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. $a_0, j_0 > 0$

— v.p $\lambda = -1$. Pour déterminerE_{-1} le sev propre de B associé à 2, on résout l'équation $(B+I_3).X = 0$ d'inconnue X. En reprenant le pivot de GAUSS effectué précédemment, cette équation, après avoir posé $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à

$$3x+4y = 0 \text{ et } 2y+3z = 0$$

et donc

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si la matrice B *était* diagonalisable, on pourrait trouver une famille de trois vecteurs de $\mathbb{C}^3$ composée de vecteurs propres de B. Au moins deux d'entre eux seraient dans le même sev propre de B (car il n'y a que deux sev propres !) et, comme ces sev propres sont des droites, ils seraient forcément colinéaires, une contradiction.

On verra bientôt l'argument similaire, plus général et officiel du cours de BCPST2 concernant la diagonalisabilité et la somme des dimensions des sev propres. Ici, comme la somme des dimensions des espaces propres est $2 \neq 3$, la matrice B n'est pas diagonalisable.

B.1.b. On échelonne la matrice Q, en lui appliquant l'algorithme du pivot de GAUSS), les matrice suivantes ont même rang : Q,

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_2]{\substack{L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -8 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{4}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est de rang 3, Q l'est aussi et étant carrée de taille 3×3, elle est inversible.

B.1.c. On vérifie par un calcul facile (à poser au sens de « poser une multiplication » à l'école primaire) que $B.Q$ et $Q.T$ sont identiques.

De l'identité $B.Q = Q.T$, on tire, par inversibilité de Q, que $Q^{-1}BQ = T$.

Une remarque importante ! On peut se débloquer grâce à la cohérence des énoncés. Si vous êtiez bloqué/bloquée à la recherche de v.p., cette question vous donne les deux v.p. de B à trouver 2 et 1 qui sont v.p. de T. On voit en effet que B et T sont *semblables*, elles ont donc même spectre. Les deux premières colonnes de Q donnent des vecteurs propres de B..

B.1.d. On a

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

On remarque que $D.N = N.D$ (faire le calcul !) et que $T^2 = 0$.

Soit $n \geq 2$, la formule du binôme de NEWTON. on a

$$T^n = (D+N)^n = D^n + n.D^{n-1}.T + \underbrace{\ldots}_{=0}$$

Comme

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}, D^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}, D^{n-1}.T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n.(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

B.2.a. Notons

$$Y_n = \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

D'une année n sur la suivante $n+1$,

— « une oiselle de moins d'un an n'est pas féconde, chaque oiselle donne, en moyenne, naissance a 4 oiselles durant sa deuxième année de vie et autant pendant sa troisième année » donne

$$J_{n+1} = 4.P_n + 4.A_n$$

— « 75% des oiselles survivent au dela de leur première année » donne

$$P_{n+1} = \frac{3}{4} J_n$$

— « les deux tiers des oiselles vivantes à la fin de la deuxième année survivent, mais jamais au dela de la troisième année » donne

$$A_{n+1} = \frac{2}{3} P_n$$

Ce qui, matriciellement, ce réécrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = B.Y_n$$

En posant $Y'_n = Q^{-1}.Y_n$, ceci se réécrit (il ya une petite récurrence à faire pour la deuxième formule) en successivement

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y'_{n+1} = \underbrace{Q^{-1}.B.Q}_{=T}.Y'_n,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y'_n = T^n.Y'_0 = T^n.Q^{-1}.\begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

et enfin

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = Q.T^n.Q^{-1}.\begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

B.2.b. Ecrivons

$$T^n = 2^n.C'_1 + (-1)^n.C'_2 + n(-1)^n.C'_3$$

avec

$$C'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors, en développant l'expression précédente

$$Y_n = \begin{pmatrix} J_n \\ P_n \\ A_n \end{pmatrix} = \left(2^n.C_1 + (-1)^n.C_2 + n(-1)^n.C_3\right).Y_0 = \left(2^n.C_1 + (-1)^n.C_2 + n(-1)^n.C_3\right)\begin{pmatrix} J_0 \\ P_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

où

$$C_1 = Q.C'_1.Q^{-1}, C_2 = Q.C'_2.Q^{-1} \text{ et } C_3 = Q.C'_3.Q^{-1}$$

B.3. On note S_n l'effectif total des oiselles de $\mathscr{P}_2$, on admet que J_0, A_0 et P_0 sont non nuls et que :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{32}{27} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

B.3.a. On a (traduction ligne à ligne de l'égalité matricielle démontrée), du fait que $(-1)^n$ et $(-1)^n.n$ sont $O(n)$ et donc $o(2^n)$, que

$$\begin{aligned} J_n &= 2^n\left(\frac{4}{9}J_0+\frac{32}{27}P_0+\frac{8}{9}A_0\right)+o(2^n) \\ P_n &= 2^n\left(\frac{1}{6}J_0+\frac{4}{9}P_0+\frac{1}{3}A_0\right)+o(2^n) \\ A_n &= 2^n\left(\frac{1}{18}J_0+\frac{4}{27}P_0+\frac{1}{9}A_0\right)+o(2^n) \end{aligned}$$

Il est donc clair que les suites (J_n), (P_n) et (A_n) divergent vers $+\infty$, elles sont,chacune, équivalentes à $K.2^n$ où K est une constante strictement positive.

B.3.b. On a vu que $C_1 = C_1 = Q.C_1'.Q^{-1}$ où C_1' est de rang 1. On a donc $\mathrm{rg}(C_1) = 1$.

En sommant les trois égalités juste démontrées, on a

$$S_n = 2^n\left(\frac{12}{18}J_0+\frac{48}{27}P_0+\frac{12}{9}A_0\right)+o(2^n) = 2^n\left(\frac{2}{3}J_0+\frac{16}{9}P_0+\frac{4}{3}A_0\right)+o(2^n)$$

et donc, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{J_n}{S_n} &\to \frac{\frac{4}{9}J_0+\frac{32}{27}P_0+\frac{8}{9}A_0}{\frac{2}{3}J_0+\frac{16}{9}P_0+\frac{4}{3}A_0} = \frac{12.J_0+32.P_0+24.A_0}{18.J_0+48.P_0+36.A_0} \\ \frac{P_n}{S_n} &\to \frac{\frac{1}{6}J_0+\frac{4}{9}P_0+\frac{1}{3}A_0}{\frac{2}{3}J_0+\frac{16}{9}P_0+\frac{4}{3}A_0} = \frac{3.J_0+8.P_0+6.A_0}{12.J_0+32.P_0+24.A_0} \\ \frac{S_{n+1}}{S_n} &\to 2 \end{aligned}$$

Correction Ex.–2

Partie A
Modèle de LESLIE conservatif

On a

$$L=\begin{pmatrix}1-s_0 & 1-s_1 & 1-s_2 & \dots & 1-s_{K-1} & 1\\ s_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & s_1 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & s_2 & \ddots & & \vdots\\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & s_{K-1} & 0\end{pmatrix}$$

A.1. Résolvons le système linéaire homogène $L.X=0$ d'inconnue $X=\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_K\end{pmatrix}$. Celui-ci équivaut à

$$\sum_{k=0}^{K-1}(1-s_k).x_k+x_K=0 \text{ et } \forall k\in\{0,\dots,K-1\}\,,\, s_k.x_k=0$$

Comme $s_k\neq 0$, on a donc

$$\forall k\in\{0,\dots,K-1\}\,,\, x_k=0$$

et finalement $x_K=0$ du fait de la première équation. On a donc $L.X=0\Leftrightarrow X=0$. La matrice L est de rang $K+1$ et 0 n'est pas valeur propre de L.

A.2. On note, pour $n\in\mathbb{N}$, $t_n=\sum_{k=0}^{K}p_{n,k}$ l'effectif total de la population. On a par définition du produit matriciel $\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.P_n=(\sum_{k=0}^{K}p_{n,k})=t_n$.

Le produit $\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.L$ est une matrice ligne dont chaque composante est la somme des entrées de la colonne correspondante de L, *i.e.*

$$\forall k\in\{0,\dots,K-1\}\,,(\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.L)_k=(1-s_k)+s_k=1 \text{ et } (\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.L)_K=1+0+\dots+0=1$$

On a donc $\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.L=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}$

Soit $n\in\mathbb{N}$, on a alors

$$t_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.P_{n+1}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.L.P_n=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.P_n=t_n$$

Il est clair que la suite $t=(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n=t_0$.

A.3.a. Montrons qu'en tout généralité, une matrice carrée A de taille $n\times n$ et sa transposée $A^\top$ ont mêmes valeurs propres.

Soit λ une valeur propre de A, alors la matrice carrée $A-\lambda.I_n$ n'est pas inversible (caractérisation de cours) et donc la transposee de cette matrice $A^\top-\lambda.I_n$ n'est pas inversible et λ une valeur propre de $A^\top$.

On a donc montré que $\mathrm{Spec}A\subset\mathrm{Spec}A^\top$ et, comme $(A^\top)^\top=A$, $\mathrm{Spec}A\supset\mathrm{Spec}A^\top$ et on a l'égalité des spectres.

A.3.b. Le calcul de la question A.2 montre que $\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.L=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}$ et en passant cette identité à la transposée il apparait que $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de $L^\top$ associé à la valeur propre 1. 1 est valeur propre de L par ce qui a été dit en A.3.a

A.4. On a $X \in E_1 \Leftrightarrow L.X = X$, ce qui équivaut au système linéaire homogène de $K+1$ équations scalaires :

$$\sum_{k=0}^{K-1} (1-s_k).x_k + x_K = x_0 \text{ et } \forall k \in \{0,\dots,K-1\}, s_k.x_k = x_{k+1}.$$

Soit $X \in E_1$, l'espace propre de L associé à 1. En utilisant la deuxième égalité, on a

$$\forall k \in \{1,\dots,K\}, x_k = \pi_k.x_0$$

et donc

$$X = x_0.\begin{pmatrix} 1 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_K \end{pmatrix} = x_0.\Pi$$

On a donc $E_1 \subset \mathrm{Vect}\langle \Pi \rangle$. On a donc $\dim E_1 \leq 1$ et, comme on sait que E_1 est au moins de dimension 1 (car 1 est v.p. de L) alors on a les égalités $\dim E_1 = 1$ et $E_1 = \mathrm{Vect}\langle \Pi \rangle$.

NB : On peut raisonner autrement : On vérifie que Π satisfait $L.\Pi = \Pi$ (ce qui nécessite, pour la première ligne d'observer une somme téléscopique) et obtenir que $\mathrm{Vect}\langle \Pi \rangle \subset E_1$. On observe ensuite que du fait du triangle inférieur de 0, $L - I_{K+1}$ est de rang K, ce qui force (théorème du rang) $\dim E_1 = \dim \mathrm{Ker}\,(L - I_{K+1}) = 1$ et donc $\mathrm{Vect}\langle \Pi \rangle = E_1$

A.5. Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de L si et seulement si il existe $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} \neq 0$ tel que $L.X = \lambda.X$, ce qui se traduit par le système linéaire

$$\sum_{k=0}^{K-1} (1-s_k).x_k + x_K = \lambda.x_0 \text{ et } \forall k \in \{0,\dots,K-1\}, s_k.x_k = \lambda.x_{k+1}$$

On a montré (A.1) que 0 n'est pas valeur propre de L et donc on peut supposer $\lambda \neq 0$. En utilisant la deuxième famille d'équations, X satisfait cette famille d'équations si et seulement si

$$\forall k \in \{1,\dots,K\}, x_k = \frac{\pi_k}{\lambda^k}.x_0$$

i.e.

$$X = x_0.\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{-1}.\pi_1 \\ \vdots \\ \lambda^{-K}\pi_K \end{pmatrix}$$

Le vecteur X est non nul si et seulement si $x_0 \neq 0$ et, dans ce cas, X est aussi solution de la première équation si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{\lambda^k} = \lambda$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{\lambda^{k+1}} = 1$$

En conclusion, $\lambda \neq 0$ étant donné, il existe $X \neq 0$ vérifiant $L.X = \lambda.X$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{\lambda^{k+1}} = 1$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de L alors

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{\lambda^{k+1}} = 1$$

et, par inégalité triangulaire (sur les nombres complexes), comme $\pi_k.(1-s_k) \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{|\lambda|^{k+1}} \geq \left|\sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{\lambda^{k+1}}\right| = 1$$

On admet qu'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si λ est réel positif.
A.6. Soit F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0,\ \sum_{k=0}^{K} \pi_k.(1-s_k)\frac{1}{x^{k+1}}$$

Chaque fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{k+1}}$ est définie, continue, *strictement décroissante* sur $]0,+\infty[$, de limite $+\infty$ en 0^+, de limite 0 en $+\infty$. Les coefficients $\pi_k.(1-s_k)$ sont ≥ 0, avec l'un (pour $k=K$) strictement positif. La fonction F est donc elle aussi continue, *strictement décroissante* sur $]0,+\infty[$, de limite $+\infty$ en 0^+, de limite 0 en $+\infty$.

Par le théorème de la bijection continue, il existe une unique solution à l'équation $F(x)=1$ d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ (qui est 1 car on sait que 1 est v.p. de L) et on a

$$\forall x > 0,\ (F(x) > 1) \Leftrightarrow (x < 1)$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, est valeur propre de L alors $F(|\lambda|) > 1$ par la question précédente et donc $|\lambda| < 1$.

Partie B

Etude asymptotique de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

B.1. En supposant L diagonalisable, il existe alors une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{K+1}(\mathbb{C})$ telle que $L = Q.D.Q^{-1}$ où D est la matrice diagonale comportant un 1 dans le coin NW et ensuite, sur la diagonale, toutes les autres valeurs propres de L, de module < 1.

On a par récurrence **de type « géométrique » à écrire car c'est demandé explicitement!!** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = Q.D^n.Q^{-1}.P_0$$

La matrice D_n est diagonale avec $1^n = 1$ dans le coin en haut à gauche (NW) et les autres termes de la diagonale de la forme λ^n où λ décrit les élements du spectre de L qui sont différents de 1. Par la question A.6, ces λ vérifient $|\lambda| < 1$.
B.2. Comme pour ces $\lambda, ;\ \lambda^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, les termes de D^n tendent respectivement vers les termes de la matrice diagonale D_∞ comportant un 1 en NW, le reste étant des zéros.
B.3. Par combinaisons algèbriques (somme, produit) issus du produit matriciel exhibé en B.1, chaque composante de P_n admet une certaine limite. Posons P_∞ le vecteur des limites des composantes. On a alors, en passant l'identité $\forall n, P_{n+1} = L.P_n$ à la limite :

$$L.P_\infty = P_\infty.$$

Le vecteur P_∞ est dans E_1, il existe une constante μ telle que $P_\infty = \mu.\Pi$. Comme par ailleurs la somme t_n des composantes de chaque vecteur P_n vaut constamment t_0, il en est de même pour pour la somme des composantes de P_∞ et donc

$$t_0 = \begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.P_\infty = \mu.\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}.\Pi = \mu.\sigma$$

il vient donc $\mu = \frac{t_0}{\sigma}$ et

$$P_\infty = \frac{t_0}{\sigma}.\Pi$$

Partie C
Implémentation informatique

C.1.

```
def Leslie(S) :
    K = len(S)
    L = np.zeros((K+1, K+1))
    for j in range(K):
        L[0,j] = 1 - S[j]
        L[j+1, j] = S[j]
    L[0, K] = 1
    return L
```

C.2.

```
def VP(S) :
    K = len(S)
    P = [1]
    for j in range(K):
        P.append( P[-1]*S[j])
    return np.array(P)
```

C.3. On ne peut pas calculer L^n par l'instruction `L**n`. Cette instruction calcule la matrice composée des ℓ_{ij}^n où $L = (\ell_{ij})$.
C.4.a. La boucle sert à calculer P_n pour $n = 50$ (`range(50)`) via une implémentation en boucle d'un calcul de suite récurrente $P_{n+1} = L.P_n$.
C.4.b. On remarque que t_0 est la somme des termes du vecteur P_0.

Pour calculer `Pinfini`, on demande à Numpy de diagonaliser la matrice L et on récupère `vecp[:, 0]` le vecteur propre associé à la plus grande v.p. en module, c'est à dire 1. Ce vecteur est colinéaire au vecteur Π de la question B.3. En calculant `sigma` la somme des termes de ce vecteur (ce n'est pas forcément le σ de B.3), puis `Pinfini` par la formule indiquée à comparer avec celle de B.3, on aboutit au vecteur P_∞ de cette question, dont les composantes sont proches de P_n lorsque n est grand.
C.5. Pour retrouver les valeurs perdues, on se base sur deux remarques :

— t_0 est la somme des composantes de P_∞ ;

— les valeurs des s_k s'obtiennent en calculant les quotients de deux composantes consécutives de P_∞.

Cela donne le code :

```
#Retrouver les données
t0_new = Pinfini.sum()
K = Pinfini.shape[0] - 1
S_new = np.zeros((K,))
for i in range(K):
    S_new[K - i -1] = Pinfini[i+1] / Pinfini[i]
print("t0 = ",t0_new, "S = ", S_new)
```

et on trouve

```
t0 =  (0.9999999999999998+0j) S =  [0.3 0.2 0.1]
```