Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2023-2024**

Révisions/Formulaire 01

Analyse : quelques révisions rapides, fonctions réelles d'une variable réelle.

- Pour chaque exercice, on évaluera si le résultat est illustrable par un graphique, un schéma et/ou un calcul informatique adéquat, à réaliser si le temps le permet.
- L'utilisation des « gros » théorèmes du cours (TVI, TAF, IPP, Chgt de variable dans intégrales) doit donner lieu à une rédaction dans les standards du concours.

Limites.

Exercice 1.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. Montrer qu'il existe $A>0$ tel que

$$\forall x \in [A,+\infty[\,,\ 0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \leq 1$$

Exercice 2.— Discuter suivant la valeur de $\alpha>0$ la limite lorsque $x \to +\infty$ de $x^{\alpha}((x+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}})$.

Exercice 3.— Discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la limite en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto \frac{t^{\alpha}}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{3}}}$. (Donner un équivalent « simple »).

Exercice 4.— Rappeler les règles de calcul de limites par « croissances comparées ».

Exercice 5.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{x}}$. Montrer que $xe^{-\sqrt{x}} = o\left(x^{-2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{\ln x}}$.

Exercice 7.— Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha>0$. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\left(1+\frac{y_0}{x^{\alpha}}\right)^{x}$.

Limite monotone.

Exercice 8.— Enoncer le théorème de la limite monotone. On se limitera au cas du problème de la limite en $+\infty$ pour une fonction f définie sur un intervalle du type $[a,+\infty[$.

Exercice 9.— Montrer, sans tenter le calcul de l'intégrale, que la fonction f définie par

$$f(x)=\int_1^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t^6)^{\frac{1}{4}}}$$

admet une limite en $+\infty$.

Indication:Observer une éventuelle monotonie de f et majorer $f(x)$ par une constante en majorant simplement son intégrande.

Continuité et Dérivabilité.

Tangentes.

Exercice 10.— Rappeler la définition du nombre dérivé en x_0 d'une fonction f, réelle, de variable réelle. Rappeler le lien entre ce nombre et la tangente au graphe de f en x_0. Dessin.

Exercice 11.— Donner l'équation de la tangente à la fonction $x \mapsto x.\ln x$ en $x_0 = 1$. Etudier la position de cette tangente par rapport au graphe de la fonction.

Exercice 12.— Dans quel(s) cas, le graphe d'une fonction admet-il une (demi-)tangente verticale ? Donner un exemple de fonction dont le graphe admet une tangente verticale en $x_0 = 1$.

Composition.

Exercice 13.— Donner la définition du fait que f, une fonction de variable réelle, à valeurs réelles, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 14.— Enoncer le théorème portant sur le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une composition de deux fonctions.

Exercice 15.— Donner un intervalle de $\mathbb{R}$, centré en $\frac{1}{2}$, le plus large possible, sur lequel la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-\cos(2\pi.x)}$. est de classe $\mathscr{C}^1$.

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$? On écrira avec soin et méthode les arguments de composition. Après avoir simplifié l'expression à l'aide d'une des formules d'angle double, tracer rapidement l'allure du graphe de cette fonction.

La fonction g définie par $g(x) = x.f(x)$ est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?

Exercice 16.— Donner une formule pour la dérivée de $t \mapsto \ln(\sqrt{t^2-1}+t)$. Vous pouvez mener le calcul formellement à la physicienne en posant de nouvelles variables comme $u = \sqrt{t^2-1}+t$, $v = t^2-1$... Pour quelles valeurs de t votre formule est-elle valable ?

Tableaux de variations, bijections.

Exercice 17.—
1. Donner le tableau de variations de $x \mapsto x^3.e^{-x}$.
2. Donner le tableau de variations de $x \mapsto x^6.e^{-x^2}$.
3. Donner le tableau de variations de $t \mapsto \frac{(\ln t)^3}{t}$.
4. Donner le tableau de variations de $x \mapsto \frac{1}{1+x^6.e^{-x^2}}$.

Tracer les graphes sur machine.

Exercice 18.— Soit $I = [0,1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de dérivée *seconde* positive.
1.a. Donner l'équation de la corde au graphe de f entre les points d'abscisses 0 et 1.
1.b. Montrer que le graphe de f est en dessous de cette corde.
1.c. Montrer que le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, de dérivée seconde positive sur I, $a < b$ deux points de I.

En considérant la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = g(a+t.(b-a))$, déduire de la question précédente des propriétés de position concernant le graphe de g, ses tangentes et ses cordes.

Exercice 19.— Déterminer, en discutant sur la valeur de $c \in \mathbb{R}$, du nombre de solutions de l'équation $\frac{3}{x^2} + x = c$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 20.— Soient C, α deux nombres réels strictement positifs. Déterminer le minimum de la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto x^\alpha + \frac{C}{x}$.

Exercice 21.—
1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \ln(\sqrt{t^2+1} + t)$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Pour $y \in J$, $y = f(x)$, $x \geq 1$, calculer et simplifier $e^y + e^{-y}$ et $e^y - e^{-y}$
3. Enoncer le théorème de dérivation d'une fonction réciproque et déterminer un sous-intervalle de J maximal sur lequel f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$. Donner une formule pour $(f^{-1})'$ sur cet intervalle.

Développements limités.

Exercice 22.—
1. Rappeler la formule de Taylor à l'ordre n en 0, en x_0.
2. Donner les développements limités classiques. En faire une liste hiérarchisée.

Exercice 23.—
1. Comparer, au voisinage de 0, les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$.
2. Comparer, au voisinage de 0, les fonctions $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto 2\tan(x)$.

Exercice 24.— Justifier, avec le minimum de calculs, que le DL d'ordre 37 de $\tan(x^3 - x)$ ne comporte que des puissances impaires.

Calcul intégral

Croissance de l'intégrale

Exercice 25.—
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$
En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$
2. De même, calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(n^3 t\right)\right) e^{-nt}\, dt.$$

Exercice 26.— Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n = \int_0^1 f(t)\cos(n.t)\; dt.$$
Par une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |I_n| \leq \frac{C}{n}$$
et donner la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Ipp et récurrence.

Exercice 27.— On pose, pour $p,q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \, dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{0,q}$.

2. Donner une relation entre $I_{p+1,q-1}$ et $I_{p,q}$. En déduire une formule donnant $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

Indication:On doit trouver $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

Changement de variable

Exercice 28.— Enoncer le théorème de changement de variable pour une intégrale.

Exercice 29.— Donner une formule donnant, pour $p,q \in \mathbb{N}$,

$$J_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(x).\sin^{2q+1}(x) \, dx$$

à l'aide de factorielles.

Indication:Se ramener par changement de variable à $I_{p',q'}$ de l'exercice 27 en posant $u = \sin^2(x)$.

Sommes de RIEMANN

Exercice 30.—

1. En utilisant les sommes de RIEMANN calculer $\int_0^1 x^2 dx$. On rappelle que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En utilisant les sommes de RIEMANN associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites :

2.a. $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n\alpha+i\beta}$ avec α et β deux réels strictement positifs.

2.b. $I_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 31.— On considère

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+k)}}.$$

Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 32.— $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$?

Techniques

Exercice 33.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions définies par :

$$f_1(x) = \tan^2 x, \quad f_2(x) = \tan x, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}, \quad f_4(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$
$$f_5(x) = |x^2-1|, \quad f_6(x) = \frac{1}{(x-5)^3}, \quad f_7(x) = \ln(4-x), \quad f_8(x) = |x|^{2/5}.$$

Exercice 34.— Préciser les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont continues, puis en déterminer toutes les primitives sur chacun de ces intervalles.

$$f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^3}, \, g(x) = \arcsin x, \, h(x) = \cos^3 x, \, i(x) = \frac{1}{2+\sin x}.$$

Exercice 35.— Déterminer A et B dans l'égalité suivante :

$$\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x^2-x-2} dx$.

Exercice 36.— Calculer

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+4x+8}\, dx, \, \int_0^1 \frac{2x^2+1}{x^2+1}\, dx$$

Exercice 37.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x).\ln x\, dx, \, I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)\, dx, \, I_3 = \int_1^e (\ln x)^3\, dx.$$

Exercice 38.— Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx.$$

1. Exprimer $I(p+1,q)$ en fonction de $I(p,q+1)$.
2. Calculer $I(0,q)$. En déduire $I(p,q)$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
3. En considérant, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme

$$T(t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p I(p,n-p),$$

retrouver le résultat de l'exercice 27.

Divers

Exercice 39.— Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx, \qquad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}.$$

On posera respectivement $u = x+1$, $u = \cos^2 x$, $u = \cos x$ et $x = u^2 - 1$.

Exercice 40.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt, \qquad \varphi_2(x) = \int_x^{x^3} f(t)dt, \qquad \varphi_3(x) = \int_x^{x^3} f(tx)dt.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer φ_1' et φ_2'.
2. Montrer que φ_3 est continue en 0, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $\varphi_3'(x)$ si $x \neq 0$.
3. Montrer que $\varphi_3 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 41.— Pour tout entier naturel n on note :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sin x}, \qquad I_n = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f_n(x)dx.$$

1. Justifier la bonne définition de I_n. Rappeler les valeurs $\sin(\pi/3)$, $\sin(2\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/3)$.
2. Donner la valeur de I_1.
3. Donner la valeur de I_0. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en utilisant la relation $\sin x = 2t/(1+t^2)$.
4. n étant un entier naturel, simplifier $I_{n+2} - I_n$ en utilisant autant de fois que nécessaire la relation trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin((p-q)/2)\sin((p+q)/2)$.
5. En déduire la valeur de I_n lorsque n est impair.
6. Donner les valeurs de I_2 et de I_4.

Exercice 42.— Pour un nombre réel x, on considère la formule

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(x.\tan\theta)\ d\theta$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la valeur de $F(0)$, de $F(1)$.
3. On admet que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta}{1+x^2.\tan^2\theta}\ d\theta$$

3.a. Justifier heuristiquement du caractère raisonnable de cette formule.
3.b. Calculer $F'(0)$.
3.c. Effectuer (en le justifiant) le changement de variable $u = \tan\theta$ dans cette intégrale et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{u}{(1+x^2.u^2)(1+u^2)}\ du$$

3.d. Donner la valeur de $F'(\pm 1)$. **3.e.** Pour $x \neq \pm 1$, vérifier la décomposition

$$\frac{u}{(1+x^2.u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{(x^2-1)}\left(x.\frac{x.u}{1+(x.u)^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)$$

et en déduire une formule sans signe intégral pour $F'(x)$.

Exercice 43.— Intégrales de WALLIS et application à la formule de STIRLING. (D'après AV-2004)

NB : La formule finale doit faire partie de votre bagage culturel ! !

Soit λ un nombre réel ≥ 0. On note

$$W_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \, d\theta$$

Le but de cet exercice est d'obtenir une formule exacte pour W_λ, l'intégrale de WALLIS, lorsque λ est un nombre entier, d'obtenir un équivalent simple de W_λ lorsque $\lambda \to +\infty$ et finalement d'obtenir un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.

1. On pose

$$\tilde{W}_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^\lambda \, d\theta$$

Justifier que W_λ et $\tilde{W}_\lambda$ sont bien définies et montrer qu'elles sont égales.

2.a. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto W_\lambda$ est une fonction décroissante, strictement positive sur $[0,+\infty[$.

2.b. Quelle est sa valeur en 0 ? sa valeur en 1, sa valeur en 2 ?

3.a. Justifier que, pour $\lambda \in [0,+\infty[$, la fonction $\theta \mapsto (\cos\theta)^{\lambda+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donner une formule pour sa dérivée.

3.b. Cette fonction est-elle en général de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

4. Montrer que pour tout $\lambda \in [0,+\infty[$,

$$W_{\lambda+2} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} W_\lambda$$

5.a. Vérifier que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

5.b. Donner une formule pour W_{2p+1} lorsque p est un entier naturel.

6. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leq \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leq \frac{W_n}{W_{n+2}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

et donner la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}$ lorsque $n \to +\infty$.

7.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = (n+1) W_{n+1} W_n$$

est constante.

7.b. En déduire que $n(W_n)^2$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $n \to +\infty$ et exhiber un équivalent simple de W_n lorsque $n \to +\infty$.

8. Pour un nombre réel λ, on note $\lfloor \lambda \rfloor$ sa partie entière, i.e le plus grand entier naturel inférieur ou égal à λ.

8.a. Montrer que

$$\frac{W_{\lfloor \lambda \rfloor + 1}}{W_{\lfloor \lambda \rfloor}} \leq \frac{W_\lambda}{W_{\lfloor \lambda \rfloor}} \leq 1$$

8.b. En déduire un équivalent simple de W_λ lorsque $\lambda \to +\infty$.

9. On prouvera plus tard l'existence d'une constante $C \in]0+\infty[$ telle que , lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln C + o(1)$$

9.a. Déterminer la constante C.

9.b. Donner un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$. (formule de STIRLING)

Corrections

Correction Ex.–43 Soit λ un nombre réel > 0. On note

$$W_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \, d\theta \text{ et } \tilde{W}_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^\lambda \, d\theta$$

1. La fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ est définie, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Elle y est ≥ 0. La fonction $y \mapsto y^\lambda$ est continue sur $[0, +\infty[$ car $\lambda > 0$, par composition, $\theta \mapsto (\cos\theta)^\lambda$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrale W_λ est donc définie au sens de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. L'argument pour $\tilde{W}$ est le même.

Par ailleurs, effectuons le changement de variable $\tau = \frac{\pi}{2} - \theta$. On a $d\tau = -d\theta$, quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 0$ et quand $\theta = 0$, $\tau = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} W_\lambda &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \, d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos(\tau - \frac{\pi}{2}))^\lambda \, d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\tau))^\lambda \, d\tau \\ &= \tilde{W}_\lambda \end{aligned}$$

2. 2.a. Comme, pour $0 \leq y \leq 1$, la fonction $\lambda \mapsto y^\lambda$ est décroissante [1] sur $[0, +\infty[$, on a, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pour $0 \leq \lambda \leq \lambda'$,

$$(\cos\theta)^\lambda \geq (\cos\theta)^{\lambda'} \geq 0.$$

Par intégration on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \, d\theta \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{\lambda'} \, d\theta \geq 0.$$

i.e. $W_\lambda \geq W_{\lambda'} \geq 0$. Ceci montre que la fonction $\lambda \mapsto W_\lambda$ est une fonction décroissante [2], positive sur $[0, +\infty[$.

Si elle s'annule pour un certain λ, comme l'intégrande est positive et continue sur l'intervalle fermé d'intégration, cela implique que cette intégrande est nulle. Ceci est clairement faux et donc $\forall\lambda \geq 0$, $W_\lambda > 0$.

2.b. On a, en linéarisant la dernière intégrale,

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}[\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. 3.a. Soit $\lambda \in [0, +\infty[$, et posons pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g(\theta) = (\cos\theta)^{\lambda+1}$.

Comme $\theta \mapsto \cos\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, positive sur cet intervalle, comme la fonction $y \mapsto y^{\lambda+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ avec pour dérivée [3] $y \mapsto \lambda.y^\lambda$, alors, par composition, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec pour dérivée,

$$\forall\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], g'(\theta) = -(\lambda + 1).\sin\theta(\cos\theta)^\lambda$$

---

1. Quelle est sa dérivée ? il s'agit de dériver, quand $y > 0$, $\lambda \mapsto e^{\lambda \ln y}$ et de remarquer que $\ln y \leq 0$
2. Si on procède par dérivation, on a un problème théorique car alors, il faut dériver une intégrale dépendant d'un paramètre, action pour laquelle nous ne disposons pas de thm général même si nous savons que le calcul se passe souvent de la façon attendue.
3. notamment, en 0, le nombre dérivé de cette fonction est 0.

3.b. Si $\lambda < 1$, g n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$. Il y a un problème en $\frac{\pi}{2}$, seul point où le cos s'annule. On a, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$$g''(\theta) = -\lambda(\lambda+1)\sin^2\theta(\cos\theta)^{\lambda-1} - (\lambda+1).(\cos\theta)^{\lambda+1}$$

La limite de cette expression lorsque $\theta \to \frac{\pi}{2}$ est $-\infty$ lorsque $\lambda < 1$. Même si $g''(0)$ existe, g'' ne peut être continue en 0.

4. On a

$$W_{\lambda+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \cos^2\theta \, d\theta = W_\lambda - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \sin\theta.\sin\theta \, d\theta$$

Intégrons par parties l'intégrale (le $-$ y compris) dans cette dernière expression, comme indiqué, en posant $u(\theta) = \frac{1}{\lambda+1}(\cos\theta)^{\lambda+1}$ et $v(\theta) = \sin(\theta)$, $v'(\theta) = \cos\theta$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-(\cos\theta)^\lambda \sin\theta}_{u'(\theta)}.\underbrace{\sin\theta}_{v(\theta)} \, d\theta &= \left[\frac{1}{\lambda+1}(\cos\theta)^{\lambda+1}.\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\lambda+1}(\cos\theta)^{\lambda+2} \, d\theta \\ &= -\frac{1}{\lambda+1}W_{\lambda+2}\end{aligned}$$

Résumons, on a montré que

$$W_{\lambda+2} = W_\lambda - \frac{1}{\lambda+1}W_{\lambda+2}$$

i.e

$$(\lambda+2)W_{\lambda+2} = (\lambda+1)W_\lambda \text{ ou } W_{\lambda+2} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}W_\lambda \qquad \text{(REC)}$$

5. 5.a. la relation (REC), montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2(p+1)}W_{2p}$$

Montrons la relation

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{(R(p))}$$

par récurrence que $p \in \mathbb{N}$.

1. $(R(0))$ est $W_0 = \frac{\pi}{2}$, on a vu précédemment que cette relation est vraie.
2. Supposons $(R(p))$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}W_{2(p+1)} &= \frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{2^p(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)^2}\frac{(2p)!}{2^p(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

   et donc $(R(p+1))$ est vraie.
3. $(R(p))$ est donc vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.

5.b. Sur le même modèle, on a par (REC),

$$
\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} &= W_{(2p+1)+2} = \frac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} = \frac{2^2(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)}W_{2p+1} \\
&= \frac{2^2(p+1)^2 2^2 p^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)2p}W_{2(p-1)+1} = \cdots \\
&= \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}W_1
\end{aligned}
$$

On devrait donc avoir, par récurrence,

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \tag{R'(p)}$$

Vérifions ceci

1. La formule $(R'(p))$ pour $p=0$ est $W_1 = 1$, ce qui est vrai
2. Supposons $(R'(p))$ vraie, on a alors

$$
\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} &= \frac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} = \frac{2p+2}{2p+3}\frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2} = \frac{4(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}
$$

et donc $(R'(p+1))$ est vraie. ce qui conclut la récurrence.

6. On a vu que $\lambda \mapsto W_\lambda$ est décroissante, strictement positive et donc $W_{n+1} \geq W_{n+2}$, i.e $\frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \geq 1$.

Par ailleurs $W_{n+1} \leq W_n$ et donc

$$\frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leq \frac{W_n}{W_{n+2}}$$

Finalement, la relation (REC) donne que

$$\frac{W_n}{W_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

On a donc montré les trois inégalités recherchées.

Comme le terme le plus à droite de cette inégalité tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$ et que 1 est la borne de gauche, le théorème des gendarmes garantit que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{W_{n+1}}{W_{2n+2}} \to 1$$

7. 7.a.

Posons $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Par la relation (REC), on a, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} = u_n$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. Elle vaut

$$u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

7.b. On a alors, pour un entier n,

$$nW_n^2 = \frac{n}{n+1}\frac{W_n}{W_{n+1}}u_n = \frac{n}{n+1}\frac{W_n}{W_{n+1}}\frac{\pi}{2}$$

Par ce qui a été fait précédemment, lorsque $n \to +\infty$, $\frac{n}{n+1} \to 1$, $\frac{W_n}{W_{n+1}} \to 1$ et donc

$$nW_n^2 \to \frac{\pi}{2}$$

et finalement,

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

8. Pour un nombre réel λ, on note $\lfloor\lambda\rfloor$ sa partie entière, i.e le plus grand entier naturel inférieur ou égal à λ.
8.a. La décroissance de W, montre, comme $\lfloor\lambda\rfloor + 1 \geq \lambda \geq \lfloor\lambda\rfloor$, que

$$W_{\lfloor\lambda\rfloor+1} \leq W_\lambda \text{ et } W_\lambda \leq W_{\lfloor\lambda\rfloor}.$$

On a donc

$$\frac{W_\lambda}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \leq 1 \text{ et } \frac{W_{\lfloor\lambda\rfloor+1}}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \leq \frac{W_\lambda}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}}$$

8.b. Par l'équivalent trouvé précédemment, comme, lorsque $\lambda \to +\infty$, $\lfloor\lambda\rfloor \to +\infty$,

$$\frac{W_{\lfloor\lambda\rfloor+1}}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \sim \frac{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor}}{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor+1}} \to 1$$

et donc

$$W_\lambda \quad \sim \quad W_{\lfloor\lambda\rfloor} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

9. On suppose l'existence d'une constante $C \in]0+\infty[$ telle que , lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln C + o(1)$$

9.a. On a démontré que, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

On a donc, en remplaçant le $\ln((2p)!)$ et $\ln(p!)$ par le développement proposé, lorsque $p \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\ln W_{2p} &= \ln((2p)!) - 2\ln(p!) - 2p\ln 2 + \ln\frac{\pi}{2} + o(1) \\
&= 2p\ln(2p) - 2p + \frac{1}{2}\ln(2p) + \ln C - 2p\ln p + 2p - \ln p - 2\ln C - 2p\ln 2 + \ln\frac{\pi}{2} + o(1) \\
&= -\ln C + \ln\pi - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln p + o(1) \\
&= \ln\frac{\pi}{C.\sqrt{2p}} + o(1)
\end{aligned}$$

En passant cette relation à l'exponentielle, on a donc

$$W_{2p} \quad = \quad \frac{\pi}{C.\sqrt{2p}}e^{o(1)} \sim \frac{\pi}{C.\sqrt{2p}}$$

Or, l'équivalent trouvé précédemment était

$$W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2p}}$$

Il vient donc

$$\frac{\pi}{C} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

i.e.

$$C = \sqrt{2\pi}$$

9.b. On a donc

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi} + o(1)$$

en passant cette relation à l'exponentielle, il vient

$$n! = \sqrt{2\pi}.n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{o(1)} \sim \sqrt{2\pi}.n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

NB : Dans ces calculs d'équivalent, la seule règle utilisable concerne les quotients et produits d'équivalents. Ni somme, ni composition avec des fonctions, pour régler ces cas, on a plutôt recours à des développements limités ou à leur généralisation telles que la formule proposée pour $\ln n!$ avec un reste en $o(.)$. Pour passer à l'équivalent, on remarque simplement que $e^{o(1)} \to 1$.