Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2023-2024**

Révisions/Formulaire 01

Analyse : quelques révisions rapides, fonctions réelles d'une variable réelle.

— Pour chaque exercice, on évaluera si le résultat est illustrable par un graphique, un schéma et/ou un calcul informatique adéquat, à réaliser si le temps le permet.
— L'utilisation des « gros » théorèmes du cours (TVI, TAF, IPP, Chgt de variable dans intégrales) doit donner lieu à une rédaction dans les standards du concours.

Limites.

Exercice 1.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[\,,\ 0 \leq \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \leq 1$$

Exercice 2.— Discuter suivant la valeur de $\alpha > 0$ la limite lorsque $x \to +\infty$ de $x^{\alpha}((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})$.

Exercice 3.— Discuter suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la limite en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto \frac{t^{\alpha}}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{3}}}$. (Donner un équivalent « simple »).

Exercice 4.— Rappeler les règles de calcul de limites par « croissances comparées ».

Exercice 5.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{x}}$. Montrer que $xe^{-\sqrt{x}} = o\left(x^{-2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6.— Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $xe^{-\sqrt{\ln x}}$.

Exercice 7.— Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\left(1 + \frac{y_0}{x^{\alpha}}\right)^x$.

Limite monotone.

Exercice 8.— Enoncer le théorème de la limite monotone. On se limitera au cas du problème de la limite en $+\infty$ pour une fonction f définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$.

Exercice 9.— Montrer, sans tenter le calcul de l'intégrale, que la fonction f définie par

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t^6)^{\frac{1}{4}}}$$

admet une limite en $+\infty$.

Indication:Observer une éventuelle monotonie de f et majorer $f(x)$ par une constante en majorant simplement son intégrande.

Continuité et Dérivabilité.

Tangentes.

Exercice 10.— Rappeler la définition du nombre dérivé en x_0 d'une fonction f, réelle, de variable réelle. Rappeler le lien entre ce nombre et la tangente au graphe de f en x_0. Dessin.

Exercice 11.— Donner l'équation de la tangente à la fonction $x \mapsto x.\ln x$ en $x_0 = 1$. Etudier la position de cette tangente par rapport au graphe de la fonction.

Exercice 12.— Dans quel(s) cas, le graphe d'une fonction admet-il une (demi-)tangente verticale ? Donner un exemple de fonction dont le graphe admet une tangente verticale en $x_0 = 1$.

Composition.

Exercice 13.— Donner la définition du fait que f, une fonction de variable réelle, à valeurs réelles, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 14.— Enoncer le théorème portant sur le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une composition de deux fonctions.

Exercice 15.— Donner un intervalle de $\mathbb{R}$, centré en $\frac{1}{2}$, le plus large possible, sur lequel la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-\cos(2\pi.x)}$. est de classe $\mathscr{C}^1$.

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$? On écrira avec soin et méthode les arguments de composition. Après avoir simplifié l'expression à l'aide d'une des formules d'angle double, tracer rapidement l'allure du graphe de cette fonction.

La fonction g définie par $g(x) = x.f(x)$ est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?

Exercice 16.— Donner une formule pour la dérivée de $t \mapsto \ln(\sqrt{t^2-1}+t)$. Vous pouvez mener le calcul formellement à la physicienne en posant de nouvelles variables comme $u = \sqrt{t^2-1}+t$, $v = t^2-1$... Pour quelles valeurs de t votre formule est-elle valable ?

Tableaux de variations, bijections.

Exercice 17.—
1. Donner le tableau de variations de $x \mapsto x^3.e^{-x}$.
2. Donner le tableau de variations de $x \mapsto x^6.e^{-x^2}$.
3. Donner le tableau de variations de $t \mapsto \frac{(\ln t)^3}{t}$.
4. Donner le tableau de variations de $x \mapsto \frac{1}{1+x^6.e^{-x^2}}$.

Tracer les graphes sur machine.

Exercice 18.— Soit $I = [0,1]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de dérivée *seconde* positive.
1.a. Donner l'équation de la corde au graphe de f entre les points d'abscisses 0 et 1.
1.b. Montrer que le graphe de f est en dessous de cette corde.
1.c. Montrer que le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, de dérivée seconde positive sur I, $a < b$ deux points de I.

En considérant la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = g(a+t.(b-a))$, déduire de la question précédente des propriétés de position concernant le graphe de g, ses tangentes et ses cordes.

Exercice 19.— Déterminer, en discutant sur la valeur de $c \in \mathbb{R}$, du nombre de solutions de l'équation $\frac{3}{x^2} + x = c$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 20.— Soient C, α deux nombres réels strictement positifs. Déterminer le minimum de la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto x^\alpha + \frac{C}{x}$.

Exercice 21.—
1. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \ln(\sqrt{t^2+1} + t)$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Pour $y \in J$, $y = f(x)$, $x \geq 1$, calculer et simplifier $e^y + e^{-y}$ et $e^y - e^{-y}$
3. Enoncer le théorème de dérivation d'une fonction réciproque et déterminer un sous-intervalle de J maximal sur lequel f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$. Donner une formule pour $(f^{-1})'$ sur cet intervalle.

Développements limités.

Exercice 22.—
1. Rappeler la formule de TAYLOR à l'ordre n en 0, en x_0.
2. Donner les développements limités classiques. En faire une liste hiérarchisée.

Exercice 23.—
1. Comparer, au voisinage de 0, les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$.
2. Comparer, au voisinage de 0, les fonctions $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto 2\tan(x)$.

Exercice 24.— Justifier, avec le minimum de calculs, que le DL d'ordre 37 de $\tan(x^3 - x)$ ne comporte que des puissances impaires.

Calcul intégral

Croissance de l'intégrale

Exercice 25.—
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

2. De même, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\sin\left(n^3 t\right)\right) e^{-nt}\, dt.$$

Exercice 26.— Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 f(t) \cos(n.t)\, dt.$$

Par une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |I_n| \leq \frac{C}{n}$$

et donner la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Ipp et récurrence.

Exercice 27.— On pose, pour $p,q \in \mathbb{N}$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

1. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{0,q}$.

2. Donner une relation entre $I_{p+1,q-1}$ et $I_{p,q}$. En déduire une formule donnant $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

Indication:On doit trouver $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$

Changement de variable

Exercice 28.— Enoncer le théorème de changement de variable pour une intégrale.

Exercice 29.— Donner une formule donnant, pour $p,q \in \mathbb{N}$,

$$J_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(x).\sin^{2q+1}(x)\,dx$$

à l'aide de factorielles.

Indication:Se ramener par changement de variable à $I_{p',q'}$ de l'exercice 27 en posant $u = \sin^2(x)$.

Sommes de RIEMANN

Exercice 30.—

1. En utilisant les sommes de RIEMANN calculer $\int_0^1 x^2dx$. On rappelle que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En utilisant les sommes de RIEMANN associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites :

2.a. $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n\alpha+i\beta}$ avec α et β deux réels strictement positifs.

2.b. $I_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 31.— On considère

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}.$$

Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 32.— $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$?

Techniques

Exercice 33.— Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions définies par :

$$f_1(x)=\tan^2 x,\quad f_2(x)=\tan x,\quad f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}},\quad f_4(x)=\frac{ax+b}{cx+d},$$
$$f_5(x)=|x^2-1|,\quad f_6(x)=\frac{1}{(x-5)^3},\quad f_7(x)=\ln(4-x),\quad f_8(x)=|x|^{2/5}.$$

Exercice 34.— Préciser les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont continues, puis en déterminer toutes les primitives sur chacun de ces intervalles.

$$f(t)=\frac{1}{t(\ln t)^3},\, g(x)=\arcsin x,\, h(x)=\cos^3 x,\, i(x)=\frac{1}{2+\sin x}.$$

Exercice 35.— Déterminer A et B dans l'égalité suivante :

$$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x^2-x-2}dx$.

Exercice 36.— Calculer

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+4x+8}\,dx,\ \int_0^1\frac{2x^2+1}{x^2+1}\,dx$$

Exercice 37.— Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_{\pi/2}^{2\pi/3}(x\cos x+\sin x).\ln x\,dx,\, I_2=\int_1^{e^{\pi/2}}\cos(\ln x)\,dx,\, I_3=\int_1^e(\ln x)^3\,dx.$$

Exercice 38.— Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose :

$$I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx.$$

1. Exprimer $I(p+1,q)$ en fonction de $I(p,q+1)$.
2. Calculer $I(0,q)$. En déduire $I(p,q)$ pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.
3. En considérant, pour $n\in\mathbb{N}^*$ le polynôme

$$T(t)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^p I(p,n-p),$$

retrouver le résultat de l'exercice 27.

Divers

Exercice 39.— Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^3 x dx, \qquad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}.$$

On posera respectivement $u = x+1$, $u = \cos^2 x$, $u = \cos x$ et $x = u^2-1$.

Exercice 40.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt, \qquad \varphi_2(x) = \int_x^{x^3} f(t)dt, \qquad \varphi_3(x) = \int_x^{x^3} f(tx)dt.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer φ_1' et φ_2'.
2. Montrer que φ_3 est continue en 0, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $\varphi_3'(x)$ si $x \neq 0$.
3. Montrer que $\varphi_3 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 41.— Pour tout entier naturel n on note :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sin x}, \qquad I_n = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f_n(x)dx.$$

1. Justifier la bonne définition de I_n. Rappeler les valeurs $\sin(\pi/3)$, $\sin(2\pi/3)$, $\tan(\pi/6)$, $\tan(\pi/3)$.
2. Donner la valeur de I_1.
3. Donner la valeur de I_0. On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan(x/2)$ en utilisant la relation $\sin x = 2t/(1+t^2)$.
4. n étant un entier naturel, simplifier $I_{n+2} - I_n$ en utilisant autant de fois que nécessaire la relation trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin((p-q)/2)\sin((p+q)/2)$.
5. En déduire la valeur de I_n lorsque n est impair.
6. Donner les valeurs de I_2 et de I_4.

Exercice 42.— Pour un nombre réel x, on considère la formule

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(x.\tan\theta)\ d\theta$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Donner la valeur de $F(0)$, de $F(1)$.
3. On admet que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan\theta}{1+x^2.\tan^2\theta}\ d\theta$$

3.a. Justifier heuristiquement du caractère raisonnable de cette formule.
3.b. Calculer $F'(0)$.
3.c. Effectuer (en le justifiant) le changement de variable $u = \tan\theta$ dans cette intégrale et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{u}{(1+x^2.u^2)(1+u^2)}\ du$$

3.d. Donner la valeur de $F'(\pm 1)$. **3.e.** Pour $x \neq \pm 1$, vérifier la décomposition

$$\frac{u}{(1+x^2.u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{(x^2-1)}\left(x.\frac{x.u}{1+(x.u)^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)$$

et en déduire une formule sans signe intégral pour $F'(x)$.

Exercice 43.— Intégrales de WALLIS et application à la formule de STIRLING. (D'après AV-2004)

NB : La formule finale doit faire partie de votre bagage culturel ! !

Soit λ un nombre réel ≥ 0. On note

$$W_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^\lambda \, d\theta$$

Le but de cet exercice est d'obtenir une formule exacte pour W_λ, l'intégrale de WALLIS, lorsque λ est un nombre entier, d'obtenir un équivalent simple de W_λ lorsque $\lambda \to +\infty$ et finalement d'obtenir un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.

1. On pose

$$\tilde{W}_\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^\lambda \, d\theta$$

Justifier que W_λ et $\tilde{W}_\lambda$ sont bien définies et montrer qu'elles sont égales.

2.a. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto W_\lambda$ est une fonction décroissante, strictement positive sur $[0,+\infty[$.

2.b. Quelle est sa valeur en 0 ? sa valeur en 1, sa valeur en 2 ?

3.a. Justifier que, pour $\lambda \in [0,+\infty[$, la fonction $\theta \mapsto (\cos\theta)^{\lambda+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et donner une formule pour sa dérivée.

3.b. Cette fonction est-elle en général de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$?

4. Montrer que pour tout $\lambda \in [0,+\infty[$,

$$W_{\lambda+2} = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} W_\lambda$$

5.a. Vérifier que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

5.b. Donner une formule pour W_{2p+1} lorsque p est un entier naturel.

6. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leq \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leq \frac{W_n}{W_{n+2}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

et donner la limite de $\frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}$ lorsque $n \to +\infty$.

7.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, u_n = (n+1) W_{n+1} W_n$$

est constante.

7.b. En déduire que $n(W_n)^2$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $n \to +\infty$ et exhiber un équivalent simple de W_n lorsque $n \to +\infty$.

8. Pour un nombre réel λ, on note $\lfloor\lambda\rfloor$ sa partie entière, i.e le plus grand entier naturel inférieur ou égal à λ.

8.a. Montrer que

$$\frac{W_{\lfloor\lambda\rfloor+1}}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \leq \frac{W_\lambda}{W_{\lfloor\lambda\rfloor}} \leq 1$$

8.b. En déduire un équivalent simple de W_λ lorsque $\lambda \to +\infty$.

9. On prouvera plus tard l'existence d'une constante $C \in]0+\infty[$ telle que , lorsque $n \to +\infty$,

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln C + o(1)$$

9.a. Déterminer la constante C.

9.b. Donner un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$. (formule de STIRLING)