Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2023-2024**

Révisions/Formulaire 03

Révisions Suites/Equations différentielles

Table des matières

1 Suites

2 Equations différentielles : les bases

D'une manière la plus générale possible, on dit qu'une fonction [1] $X : I \to \mathbb{R}^d$ est solution de l'équation différentielle (du premier ordre)

$$g(t,X,\frac{dX}{dt}) = 0 \tag{EDO}$$

où g est une fonction (p.ex à valeurs numériques) définie sur une partie D_g de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ si

1. I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, X est dérivable sur I ;
2. Pour tout $t \in I$, $(t,X(t),X'(t)) \in D_g$ et

$$\forall t \in I,\, g(t,X(t),X'(t)) = 0$$

Une solution de l'équation (EDO) est donc constituée d'un intervalle I et d'une fonction X définie sur cet intervalle.

On aura souvent affaire à des équations différentielles s'écrivant sous la forme (dite résolue)

$$\frac{dX}{dt} = f(t,X) \tag{EDO,R}$$

où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, auquel on adjoint une condition initiale

$$X(t_0) = X_0 \tag{CI}$$

où $(t_0,X_0) \in D_f$ est fixé.

La conjonction équation différentielle (EDO,R) et condition initiale imposée (CI) s'appelle un problème de CAUCHY. Pour un tel problème de CAUCHY, sous des conditions assez générales (continuité, caractère $\mathscr{C}^1$) sur f, on dispose (théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ, hors-programme) d'un résultat d'existence et d'unicité des solutions, s'énonçant sous la forme :

1. (Existence) Il existe un intervalle I contenant t_0 en son intérieur, une fonction $X : I \to \mathbb{R}^d$ tels que
   (a) $X(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in I, X'(t) = f(t,X(t))$
2. (Unicité) S'il existe un intervalle $\tilde{I}$ contenant t_0 en son intérieur, une fonction $\tilde{X} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$ tels que
   (a) $\tilde{X}(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}'(t) = f(t,\tilde{X}(t))$

   alors, sur $I \cap \tilde{I}$, on a $X = \tilde{X}$.

On verra (début du cours sur les EDO), un lien important entre suites récurrentes et EDO, Le schéma d'EULER. Le théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ est l'analogue de l'existence et l'unicité obtenus pour les suites récurrentes à l'aide du principe de récurrence.

Ce type de résultat est hors-programme mais il est intéressant de vérifier une telle existence/unicité sur chaque problème concret.

Graphiquement, on peut voir une équation différentielle du type de (EDO,R), *i.e.* la donnée d'une fonction F, comme la donnée d'un « champ de vecteurs ». Il s'agit, pour la résoudre, de construire des courbes, les *courbes intégrales*, qui, en chaque point, ont pour tangente le vecteur « au point ». On peut penser à la trajectoire d'une particule à l'intérieur d'un fluide.

1. Dans notre pratique, le plus souvent $d = 1,2$ ou 3.

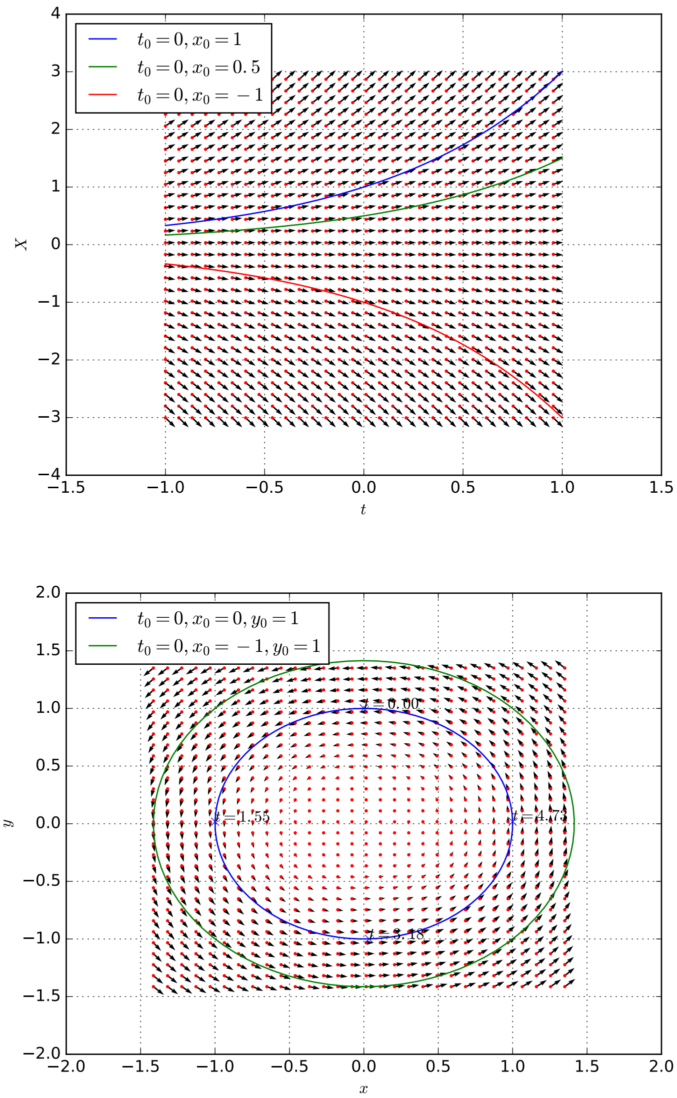

FIGURE 1 – Champs de vecteurs et quelques courbes intégrales.

Résoudre analytiquement une équation différentielle (ou un problème de CAUCHY), c'est en déterminer la(les) solution(s) X en fonction de t et de t_0, X_0.

Au programme sont présentes un certain nombre d'équations différentielles sous forme particulière. Il faut savoir identifier ces formes particulières et la(les) méthode(s) de résolution associée(s)

2.1 Cas où f ne dépend pas de X

On se limite au cas où f est à valeurs numériques ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

L'équation différentielle s'écrit alors

$$\frac{dX}{dt} = f(t)$$

Une solution X est donc une primitive de f sur un certain intervalle I.

Si f est continue sur un intervalle I, elle y admet une primitive F. Si $t_0 \in I$, X_0 donné alors

$$X(t) = F(t) - F(t_0) + X_0$$

est *la* solution de l'équation différentielle sur I vérifiant $X(t_0) = X_0$.

Dans l'analogie avec les suites, le problème de la primitivation est analogue au problème de la résolution des sommes partielles d'une suite.

2.2 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

2.2.1 Le cas homogène, à coefficient constant

Il s'agit, $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant un nombre fixé, *Une constante !*, de résoudre

$$\frac{dX}{dt} = a.X \tag{EDO,1LH}$$

où X est une fonction à valeurs numériques.

La fonction f est donc définie par $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, X \mapsto f(X) = a.X$. La fonction f est une fonction *linéaire*. On a

1. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $X : t \mapsto e^{a.(t-t_0)}.X_0$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH).
2. Si $\tilde{I}$ est un intervalle contenant t_0 et si la fonction $\tilde{X}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\tilde{I}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH) sur $\tilde{I}$ alors

$$\forall t \in \tilde{I}, X(t) = e^{a.(t-t_0)}.X_0$$

1. Il s'agit de l'analogue de la récurrence $u_{n+1} = (1+a).u_n$ qui se résout (uniquement) en une suite géométrique (analogue discret de la fonction exponentielle)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1+a)^n.u_0$$

2. Le premier point se vérifie par simple dérivation (facile). L'énoncé d'unicité est plus subtil. Détaillons le car il s'agit de la première occurence de la méthode de variation de la constante.

Démonstration. Soit $\tilde{I}$ est un intervalle contenant t_0 et si la fonction $\tilde{X}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\tilde{I}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH) sur $\tilde{I}$. Soit $\lambda : \tilde{I} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}(t) = e^{a.(t-t_0)}.\lambda(t)$$

Un telle fonction λ existe et est de classe $\mathscr{C}^1$ car la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et *ne s'annule pas*. On a donc

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}'(t) = a.e^{a.(t-t_0)}.\lambda(t) + e^{a.(t-t_0)}.\lambda'(t)$$

i.e.

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}'(t) = a.\tilde{X} + e^{a.(t-t_0)}.\lambda'(t)$$

La fonction $\tilde{X}$ vérifie $\tilde{X}(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1LH) sur $\tilde{I}$ si et seulement si

$$\lambda(t_0) = X_0$$

et

$$\forall t \in \tilde{I}, 0 = e^{a.(t-t_0)}.\lambda'(t)$$

i.e. , du fait que $\tilde{I}$ est un intervalle,

$$\forall t \in \tilde{I}, \lambda(t) = \lambda(t_0) = X_0$$

i.e.

$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}(t) = X(t)$$

□

2.2.2 Second membre constant

Il s'agit, $a, b \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant deux nombres fixés, *des constantes !*, de résoudre

$$\frac{dX}{dt} = a.X + b \qquad \text{(EDO,1L)}$$

où X est une fonction à valeurs numériques.

On suppose $a \neq 0$. La fonction f est donc définie par $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $X \mapsto f(X) = a.X + b$. LA fonction f est une fonction *affine*.

On a

1. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $X : t \mapsto e^{a.(t-t_0)}.(X_0 + \frac{b}{a}) - \frac{b}{a}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$, vérifie $X(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1L).
2. Si $\tilde{I}$ est un intervalle contenant t_0 et si la fonction $\tilde{X}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\tilde{I}$, vérifie $\tilde{X}(t_0) = X_0$ et est solution de (EDO,1L) sur $\tilde{I}$ alors
$$\forall t \in \tilde{I}, \tilde{X}(t) = X(t)$$

1. Il s'agit de l'analogue de la récurrence $u_{n+1} = (1+a).u_n + b$, récurrence arithmético-géométrique qui se résout (uniquement) en
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1+a)^n.(u_0 + \frac{b}{a}) - \frac{b}{a}$$
2. Le premier point se vérifie par simple dérivation (facile).
3. L'énoncé d'unicité est plus subtil. On put se ramener au cas homogène en remarquant qu'une solution particulière est la fonction X_p constante égale à $-\frac{b}{a}$ et en remarquant que X est solution de (EDO,1L) si et seulement si $X - X_p$ est solution de (EDO,1LH). L'unicité de la solution de (EDO,1LH) à condition initiale imposée entraine alors l'unicité de la solution de (EDO,1L) à condition initiale imposée.

Exercice 1.— On cherche à résoudre le problème de CAUCHY

$$y(0) = 1 \text{ et } \forall t \in I, y'(t) + 3y(t) = y(t)^4$$

où I est un certain intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $y : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Résoudre, en posant $u = \frac{1}{y^3}$, cette équation en supposant que y ne s'annule pas sur I.

2. A posteriori, quel intervalle I, le plus grand possible, peut-on prendre ?

3. Répondre aux mêmes questions avec $y(0) = -1$.

2.2.3 Le cas général : coefficients non constants

Il s'agit, a, b étant deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de résoudre

$$\frac{dX}{dt} = a(t).X + b(t) \qquad \text{(EDO,1L)}$$

où X est une fonction à valeurs numériques.

Le cas homogène, $b=0$. On suppose dans cette partie que la fonction b est nulle sur l'intervalle I et que a est continue sur I. On note A une primitive de a sur I.

On considère donc l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = a(t).X \tag{EDO,1LH}$$

Soit $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}$.

1. (Existence) La fonction $X : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in I, X(t) = e^{A(t)-A(t_0)}.X_0$$
est solution de (EDO,1LH) sur I et vérifie $X(t_0) = X_0$.
2. (Unicité) Si $\tilde{I}$ est un intervalle (non trivial), contenant t_0, contenu dans I et si $\tilde{X}$ est solution de (EDO,1LH) sur I' et vérifie $\tilde{X}(t_0) = X_0$ alors
$$\forall t \in I', \tilde{X}(t) = X(t)$$

Démonstration.

1. L'existence donnée par la formule est évidente par une simple dérivation de fonctions composées.
2. L'unicité provient là encore de la méthode de variation de la constante. Posons X_h la solution trouvée précédemment pour $X_0 = 1$
$$\forall t \in I, X_h(t) = e^{A(t)-A(t_0)}$$
Posons la fonction λ, définie sur I', à valeurs numériques, par
$$\forall t \in I', \tilde{X}(t) = X_h(t).\lambda(t)$$
Cette fonction est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I' car X_h ne s'annule pas sur I' et y est de classe $\mathscr{C}^1$, de même que $\tilde{X}$. On a, par dérivation de produit, que
$$\forall t \in I', \tilde{X}'(t) = X_h'(t).\lambda(t) + X_h(t).\lambda'(t)$$
et en utilisant le fait que $\tilde{X}$ et X_h sont solutions de (EDO,1LH) sur I', il vient
$$\forall t \in I', a(t).\tilde{X}(t) = a(t).X_h(t).\lambda(t) + X_h(t).\lambda'(t)$$
et donc
$$\forall t \in I', X_h(t).\lambda'(t) = 0$$
et donc, sachant que X_h ne s'annule pas sur I',
$$\forall t \in I', \lambda'(t) = 0$$
La fonction λ est donc constante sur l'intervalle I' et, sachant que $\lambda(t_0) = X_0$, on a donc
$$\forall t \in I', \tilde{X}(t) = X_h(t).X_0 = X(t)$$

□

Le cas non homogène, solutions particulières évidentes. On revient à la résolution de

$$\frac{dX}{dt} = a(t).X + b(t) \tag{EDO,1L}$$

où X, l'inconnue est une fonction à valeurs numériques et a, b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si on connait (on voit !, tester des constantes, des fonctions "simples") une solution particulière X_p de cette équation différentielle définie sur un intervalle $I' \subset I$, on remarque que l'on a l'équivalence

$$X \text{ solution de (EDO,1L)} \Leftrightarrow X - X_p \text{ solution de (EDO,1LH)}$$

et donc

$$X \text{ solution de (EDO,1L) sur } I' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I', X(t) = X_p(t) + \lambda.e^{A(t)}$$

S'il s'agit de résoudre un problème de CAUCHY avec de plus une condition initiale imposée $X(t_0) = X_0$, on voit qu'on peut le résoudre uniquement en trouvant l'unique constante λ telle que cette condition initiale est réalisée.

Exercice 2.— Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants.
1. $u' = 2.u + e^t, u(0) = 3$.
2. $u' = 2.u + e^{2t}, u(0) = 3$.
3. $u' = -u + \cos t$, $u(0) = 1$.

Le cas non homogène, variation de la constante. On revient à la résolution de

$$\frac{dX}{dt} = a(t).X + b(t) \tag{EDO,1L}$$

où X, l'inconnue est une fonction à valeurs numériques et a, b sont deux fonctions définies, *continues* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La méthode de la variation de la constante permet de trouver *toutes* les solutions.

Soit X_h une solution sur I de l'équation homogène associée à (EDO,1L)

$$\forall t \in I, X_h(t) = e^{A(t)}$$

Pour X une fonction quelconque, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, posons la fonction λ, définie sur I, à valeurs numériques, par

$$\forall t \in I, X(t) = X_h(t).\lambda(t)$$

Cette fonction λ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car X_h ne s'annule pas sur I et y est de classe $\mathscr{C}^1$, de même que X. On a, par dérivation de produit, que

$$\forall t \in I, X'(t) = X_h'(t).\lambda(t) + X_h(t).\lambda'(t)$$

et en utilisant le fait que X_h est solution de (EDO,1LH) sur I, il vient

$$\forall t \in I, X'(t) - \underbrace{a(t).X(t)}_{a(t).X_h(t).\lambda(t)} = X_h(t).\lambda'(t)$$

La fonction X est solution de (EDO,1L) si et seulement si

$$\forall t \in I, X_h(t).\lambda'(t) = b(t)$$

i.e. , sachant que X_h ne s'annule pas sur I,

$$\forall t \in I,\, \lambda'(t) = \frac{b(t)}{X_h(t)} = e^{-A(t)}.b(t)$$

i.e. La fonction λ est une primitive sur I de $t \mapsto e^{-A(t)}.b(t)$

La résolution du problème de CAUCHY avec condition initiale $X(t_0) = X_0$ se fait en choisissant correctement la constante de primitivation et on obtient comme unique solution

$$\forall t \in I,\, X(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{-(A(s)-A(t_0))}.b(s)\; ds + X_0 \right) e^{A(t)-A(t_0)}$$

Il n'est pas question de retenir cette formule par coeur mais d'être capable, sur des exemples concrets, d'appliquer cette méthode pas à pas

Exercice 3.— Soit l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et l'équation différentielle

$$(E) : x.\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{x}{1+x^2}$$

1. Donner les solutions sur I de l'équation homogène associée à (E).
2. Donner les solutions sur I de (E).
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.— On considère l'équation différentielle

$$(x \ln x)y' + y = \ln(x) + 1$$

1. Résoudre cette équation sur $]1, +\infty[$.
2. Résoudre cette équation sur $]0, 1[$.
3. En déduire les solutions sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.— (Lemme de GRONWALL). Soit I un intervalle contenant 0. $a \in \mathbb{R}$, $f, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, f de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, b, continue sur I telles que

$$\forall t \in I,\, f'(t) \leq a.f(t) + b(t)$$

Montrer que

$$\forall t \in I,\, t \geq 0,\, f(t) \leq e^{at} f(0) + \int_0^t e^{a(t-s)} b(s)\; ds$$

Indication:Poser, comme dans la méthode de variation de la constante, $\phi(t) = e^{-a.t} f(t)$.

2.3 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2, à coefficients constants

2.3.1 Le cas homogène

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (d'ordre 2 car les dérivées de la fonction inconnue jusqu'à l'ordre 2 interviennent.

$$\frac{d^2X}{dt^2} + a.\frac{dX}{dt} + b.X = 0 \qquad \text{(EDO,2LH)}$$

La remarque fondamentale à la base de la résolution est la suivante : Une fonction exponentielle du type $X : t \mapsto e^{\alpha.t}$ satisfait cette EDO si et seulement si α vérifie l'*équation caractéristique de l'équation différentielle* :

$$\alpha^2 + a.\alpha + b = 0$$

de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

Proposition 1 (Résolution de (EDO,2LH), solutions réelles.). *une fonction $X : I \to \mathbb{R}$ satisfait (EDO,2LH) sur un intervalle I (non trivial) si et seulement si il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telle que*

$$X = \lambda.Y + \mu.Z$$

où les fonctions $Y, Z : I \to \mathbb{R}$ sont définies, suivant le signe du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$, par

1. *Si $\Delta > 0$, $Y = (t \in I \mapsto e^{\alpha_- .t})$ et $Z = (t \in I \mapsto e^{\alpha_+ .t})$ où α_-, α_+ sont les deux solutions réelles (distinctes) de l'équation caractéristique.*
2. *Si $\Delta < 0$, $Y = (t \in I \mapsto e^{r.t} \cos(\omega.t))$ et $Z = (t \in I \mapsto e^{r.t} \sin(\omega.t))$ où $\alpha_- = r + i\omega, \alpha_+ = r - i.\omega$, $(r, \omega \in \mathbb{R})$ sont les deux solutions complexes (distinctes et conjuguées) de l'équation caractéristique.*
3. *Si $\Delta = 0$, $Y = (t \in I \mapsto e^{r.t})$ et $Z = (t \in I \mapsto t.e^{r.t})$ où r est la solution (double) de l'équation caractéristique.*

Les constantes λ, μ se déterminent, de manière unique, en fonction de $X(0)$ et $X'(0)$ en résolvant le système linéaire 2×2 adéquat, de déterminant non nul.

Exercice 6.—Reprendre les exercices de première année concernant les résolutions de telles EDO avec des constantes a et b explicites.

Exercice 7.— Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2.X = 0 \tag{E}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ω pour qu'il existe une solution non nulle de (E) vérifiant de plus

$$X(0) = X(\pi) = 0$$

2.4 Le cas non homogène.

La résolution de

$$\frac{d^2X}{dt^2} + a.\frac{dX}{dt} + b.X = c(t) \tag{EDO,2L}$$

où X, l'inconnue est une fonction à valeurs numériques et a, b sont deux constantes et c une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si on connait (on voit !, tester des constantes, des fonctions "simples") une solution particulière X_p de cette équation différentielle définie sur l'intervalle I, on remarque que l'on a l'équivalence

$$X \text{ solution de (EDO,2L)} \Leftrightarrow X - X_p \text{ solution de (EDO,2LH)}$$

et donc

$$X \text{ solution réelle de (EDO,2L) sur } I \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in I, X(t) = X_p(t) + \lambda.Y(t) + \mu.Z(t)$$

où Y et Z sont définies dans la proposition 1.

S'il s'agit de résoudre un problème de CAUCHY avec de plus une condition initiale (d'ordre 2) imposée $X(t_0) = X_0, X'(t_0) = Y_0$, on voit qu'on peut le résoudre uniquement en trouvant l'unique couple de constantes (λ, μ) telle que cette condition initiale est réalisée.

Exercice 8.— Résoudre les problèmes de CAUCHY.
1. $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $u'' + u' + u = 0$.
2. $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $u''(t) + u'(t) + u(t) = e^t$. (Chercher une solution particulière sous la forme $u_{part}(t) = C.e^t$.)
3. $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u''(t) + u'(t) + u(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. (Chercher une solution particulière sous la forme $u_{part}(t) = C(t).\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).e^{-\frac{1}{2}t} + S(t).\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).e^{-\frac{1}{2}t}$ où C et S sont polynomiales (essayer affine dans un premier temps))

Exercice 9.— On considère l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$$

où f, la fonction inconnue, est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si f est solution du problème alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.
2. En déduire que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (non homogène).
3. En déduire toutes les solutions de l'équation fonctionnelle.

2.5 Equations différentielles linéaires à valeurs vectorielles

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et l'équation différentielle d'ordre 1

$$\frac{dX}{dt} = A.X$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, de classe $\mathscr{C}^1$ (chaque composante est une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.)

Il s'agit de l'analogue des suites géométriques vectorielles de la section 1.5.5.

Si la matrice A est triangulaire supérieure, on peut résoudre des équations différentielles scalaires « en cascade ».

Sinon, une méthode standard pour résoudre cette équation différentielle est de

1. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}.A.P = D$ est diagonale,
2. poser $Y = P^{-1}.X$ et constater que X vérifie $\frac{dX}{dt} = A.X$ si et seulement si Y vérifie $\frac{dY}{dt} = D.Y$
3. Résoudre ce système, composé d'équations différentielles scalaires du type $y' = a.y$, et revenir à $X = P.Y$.

Exercice 10.— On considère trois fonctions réelles u,v, w, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ satisfaisant le système d'équations différentielles

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rclll} u'(t) & = & u(t) & +v(t) & +w(t) \\ v'(t) & = & & +v(t) & +w(t) \\ w'(t) & = & & & +w(t) \end{array} \right.$$

1. En posant $X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, réécrire le système sous forme matricielle.
2. Résoudre directement ce système et écrire les solutions en fonctions de t et $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$.

Exercice 11.— On considère une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u^{(3)}(t) = 6u''(t) - 11u'(t) + 6u(t).$$

(Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 3)
1. Déterminer les fonctions u de la forme $u : t \mapsto \exp(\alpha.t)$ qui sont solutions de cette équation différentielle.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de cette équations est stable par combinaisons linéaires.
3. Trouver une solution de cette équation différentielle vérifiant $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = 0$.

⋆⋆⋆

Méthode matricielle.

4. En posant $X = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, déterminer une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par X, du type $\frac{dX}{dt} = A.X$ pour une certaine matrice A.
5. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, vérifier que la matrice P est inversible et que $P^{-1}.A.P$ est diagonale.
6. En déduire que u s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \lambda.e^t + \mu.e^{2t} + \nu.e^{3t}$$

pour trois constantes $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ déterminables en fonctions de $u(0), u'(0), u''(0)$.

Exercice 12.— Soit

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Montrer que $P^{-1}.A.P$ est une matrice diagonale. A est elle inversible ? Donner des formules pour A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. On considère une suite récurrente (vectorielle) donnée par son premier terme U_0 et

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (I_2 + A)..U_n$$

Donner les formules donnant les composantes de U_n en fonction de n et des composantes de U_0. A quelle condition sur les composantes de U_0 les composantes de U_n admettent-elles une limite lorsque $n \to +\infty$?
4. On considère le problème de CAUCHY

$$U(0) = U_0 \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0, U'(t) = A.U(t)$$

Donner des formules pour les composantes de $U(t)$ en fonction de t et des composantes de U_0. A quelle condition sur les composantes de U_0 les composantes de $U(t)$ admettent-elles une limite lorsque $t \to +\infty$?