Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2023-2024**

Révisions/Formulaire 04

Révisions Algèbre: Complexes

Identités algébriques fondamentales

Série géométrique

1. $$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = 1 - x^{n+1}$$

2. Plus généralement, si $ab = ba$, a, b nombres, matrices carrées, polynômes,

$$(b-a)\left(\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}.a^k\right) = b^{n+1} - a^{n+1}$$

3. Si $q \neq 1$, $q \in \mathbb{C}$, $n \leq m$,

$$\sum_{k=n}^{m} q^k = q^n + q^{n+1} + \cdots + q^m = q^n(1 + q + \cdots + q^{m-n}) = q^{\mathrm{n}} \frac{1 - q^{m-n+1}}{1-q} = \frac{q^n - q^{m+1}}{1-q}$$

Binôme de NEWTON

1. $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Triangle de PASCAL.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \text{ si } 0 \leq k \leq n-1$$

3. Plus généralement, si $ab = ba$, a, b nombres, matrices carrées, polynômes,..

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.b^{n-k} = \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n \\ k+\ell=n}} \frac{n!}{k!\ell!} a^k.b^\ell$$

Trigonométrie

Cercle trigonométrique

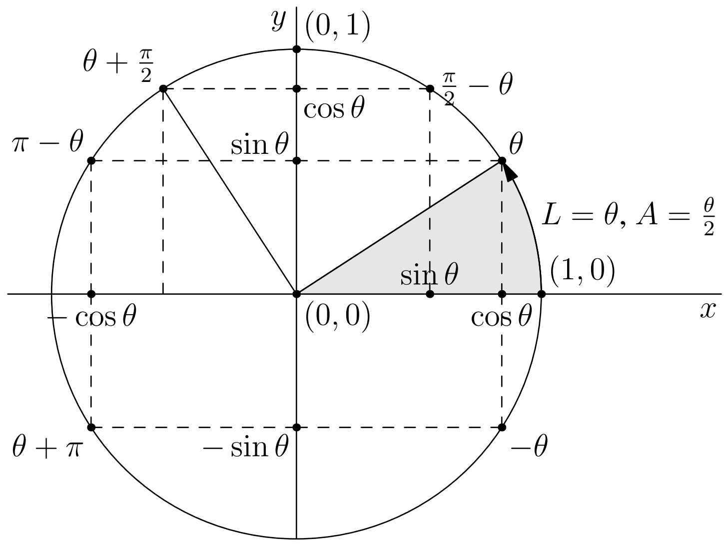

FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sin X = \sin Y & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, X = Y + k.2\pi \text{ ou } \exists \ell \in \mathbb{Z}, X = \pi - Y + \ell.2\pi \\
\cos X = \cos Y & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, X = Y + k.2\pi \text{ ou } \exists \ell \in \mathbb{Z}, X = -Y + \ell.2\pi \\
\tan X = \tan Y & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, X = Y + k.\pi
\end{array}$$

Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Exercice 1.—

1. Rappeler la technique permettant, étant donnés $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, de construire des réels a, ϕ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t) = a\cos(\omega t + \phi)\,.$$

2. Résoudre $\cos x + 2\sin x = \frac{5}{2}$.

3. Résoudre $\cos x + 2\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

Formules de duplication

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

Si $t = \tan\frac{\theta}{2}$,

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2},$$

Exercice 2.—
1. Retrouver les formules exprimant $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ en fonction de $t = \tan\frac{\theta}{2}$
2. Calculer en effectuant le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\theta}\, d\theta$$

Linéarisation des carrés, somme/produits

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b)), \qquad \sin a.\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b)),$$

$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b)).$$

En posant $p = a+b$, $q = a-b$, $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2\cos\frac{p-q}{2}.\sin\frac{p+q}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3.—Calculer $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta$.

Nombres complexes

Définition

$z = a + i.b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ avec $i^2 = -1$. Les règles de calcul algébrique littéral s'appliquent.

$$z + z' = (a + i.b) + (a' + i.b') = (a + a') + i(b + b')$$
$$z.z' = (a + i.b).(a' + i.b') = (a.a' - b.b') + i.(a.b' + a'b)$$
$$z^2 = (a + i.b)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

Conjugué

Si $z = a + i.b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{z} := a - i.b$,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \ \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Module

$$|z|^2 := z.\bar{z} = a^2 + b^2, \ |z| \in \mathbb{R}^+$$
$$|z.z'| = |z|.|z'|, \ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$|z^n| = |z|^n, \ n \in \mathbb{Z}, \ z \neq 0 \text{ si } n < 0$$
$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad \text{(Inégalité triangulaire)}$$
$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \qquad \text{(Inégalité triangulaire bis)}$$

Exponentielle et argument

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta, \ |e^{i\theta}| = 1, \ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \text{(EULER)}$$

$$e^{i0} = 1, \ e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \ e^{i\pi} = -1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}, \ e^{ik2\pi} = 1$$

$$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \ e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad \text{(EULER–DE MOIVRE)}$$

Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors θ est un argument de z et $r = |z|$.

Angle moyen

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.2\cos(\frac{\alpha - \beta}{2}), \ e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.2i\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

En particulier, si $\beta = 0$;

$$e^{i\alpha} + 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}.2\cos(\frac{\alpha}{2}), \ e^{i\alpha} - 1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}.2i\sin(\frac{\alpha}{2})$$

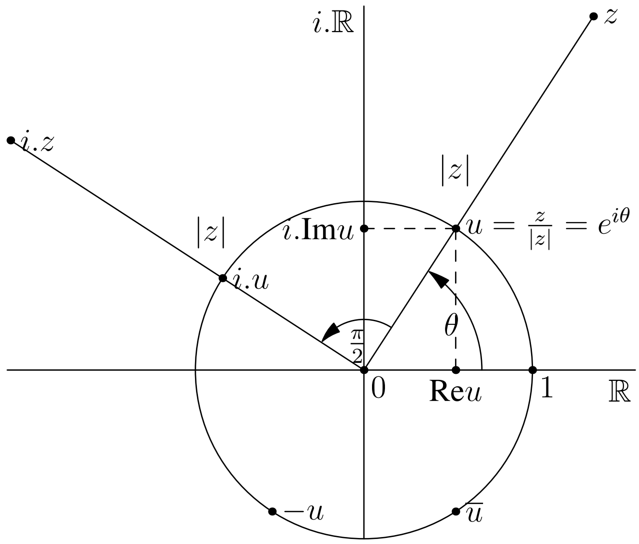

FIGURE 2 – Cercle trigonométrique et nombres complexes

Exercice 4.— Complexes : Questions diverses
1. Pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$, déterminer les réels $\rho_k > 0$ et $\theta_k \in [0, 2\pi[$ tels que $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, avec $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 3 - i\sqrt{3}$, $z_4 = \frac{1+i}{1-i}$. Représenter graphiquement les points z_k.
2. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 + 2z + 2$ est respectivement nul, réel ou imaginaire pur.
3. En utilisant la relation $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$, retrouver l'expression de $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$ en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$ en établissant un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont ces nombres (en couple) sont solution. Prendre $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $\beta = \frac{\pi}{12}$.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tels que $\frac{i-z}{1+z}$ est réel.
5. Exprimer, en fonction de x et $\cos(t)$, pour $x, t \in \mathbb{R}$, $|x - e^{it}|^2$. Interpréter géométriquement cette quantité (dessin) et démontrer, géométriquement, que, pour $x > 0$, $|x - e^{it}| \geq |x - 1|$.

Exercice 5.—Déterminer $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = -35 - 12i$ et résoudre dans l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (1+4i)z + 5(1+i) = 0$$

Exercice 6.—Déterminer les racines "2-èmes" de $1+i$ de 2 façons différentes et en déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Exercice 7.—Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 + \overline{z} + 1$ est réel.

Exercice 8.—
1. Simplifier les sommes $\sum_{k=0}^{n} \cos(k.x)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k.x)$ où n est un entier naturel et $x \in \mathbb{R}$.
2. et, $\sum_{k=0}^{n} k.\cos(k.x)$?

Exercice 9.— Une équation trigonométrique Soient n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation d'inconnue x

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(nx) = 0.$$

Exercice 10.— Racines mouvantes Soit t un réel non nul. Déterminer en fonction de t les racines réelles ou complexes du polynôme $P(z) = z^2 + tz + 2/t$. On note $z_-(t) < z_+(t)$ les deux racines réelles lorsque $t > 2$. Montrer que $z_-(t)$ et $z_+(t)$ tendent vers une limite que l'on déterminera lorsque $t \to +\infty$.

Utilisations en Analyse

Les formules d'EULER et de DE MOIVRE sont très utiles pour linéariser ou « délinéariser [1] » une expression trigonométrique. Par exemple

1. (Linéarisation)

$$\begin{aligned}
(\cos x)^5 &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5 \\
(\text{NEWTON}) &= \frac{1}{2^5}\left(e^{i5x}+5e^{i4x-ix}+10e^{i3x-i2x}+10e^{i2x-i3x}+5e^{ix-i4x}+e^{-i5x}\right) \\
(\text{regroupement}) &= \frac{1}{2^4}\cos(5x)+\frac{5}{2^4}\cos(3x)+\frac{10}{2^4}\cos(x)
\end{aligned}$$

2. (Antilinéarisation)

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \mathrm{Re}\left(e^{i5x}\right) = \mathrm{Re}\left(\cos x + i\sin x\right)^5 \\
(\text{NEWTON}) &= \mathrm{Re}\Big(\cos(x)^5+5\cos(x)^4.i.\sin(x)+10.\cos(x)^3.i^2.\sin^2(x)+ \\
&\quad 10.\cos(x)^2.i^3.\sin(x)^3+5\cos(x).i^4.\sin(x)^4+i^5.\sin(x)^5\Big) \\
(\text{simpl. } i^k) &= \cos(x)^5-10.\cos(x)^3\sin^2(x)+5\cos(x)\sin(x)^4 \\
&= \cos(x)^5-10.\cos(x)^3(1-\cos^2(x))+5\cos(x)(1-\cos(x)^2)^2
\end{aligned}$$

La linéarisation sert surtout lors de calculs de primitives et d'intégrales. L'antilinéarisation est l'opération dans l'autre direction pouvant mener à factorisation.

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = x+i.y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^z = e^x.e^{iy} = e^x.\cos(y)+i.e^x\sin(y)$$

où e^x est à prendre au sens de l'exponentielle réelle usuelle. On a $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$.

Les règles usuelles sur les puissances s'appliquent : Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z},\ (e^z)^n = e^{n.z},\ e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$$

Exercice 11.—Résoudre $e^z = -1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Représenter graphiquement les solutions.

Exercice 12.—Résoudre $e^z = i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Représenter graphiquement les solutions.

Une application importante de l'exponentielle complexe concerne le calcul de primitives et/ou de solutions d'EDO linéaires du fait de la règle de dérivation suivante. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $e_\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t.\alpha}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (au sens où partie réelle et partie imaginaire le sont) avec

$$\frac{d(e^{\alpha.t})}{dt} = \alpha.e^{\alpha.t}$$

Par exemple, une primitive de $f : t \mapsto e^{-t}\cos(2.t)$ est la partie réelle d'une primitive de $t \mapsto e^{t(-1+2i)}$. On calcule donc une telle primitive F en prenant

$$F(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-1+2.i}e^{t(-1+2i)}\right) = -\frac{1}{5}\mathrm{Re}\left((1+2.i)e^{t(-1+2i)}\right) = -\frac{1}{5}\left(e^{-t}\cos(2t)-2e^{-t}\sin(2t)\right)$$

1. antilinéariser ?

Exercice 13.— Linéarisation de polynômes trigonométriques Soit $f(x) := \cos^2 x \sin x$, $g(x) := \sin^3 x$. Linéariser ces expressions, calculer, par deux techniques différentes chacune des intégrales suivantes

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \text{ et } \int_0^\pi g(x)\,dx.$$

Exercice 14.— Antilinéarisation Calculer $\cos(5x)$ en fonction polynomiale de $\cos x$ et $\sin(5x)$ en fonction polynomiale de $\sin x$. En déduire la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Racines de l'unité (HP [2])

On a l'équivalence, pour un nombre réel θ,

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, \theta = 2k\pi$$

Exercice 15.-⋆-Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
1. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer, en écrivant z sous forme trigonométrique, que l'on a l'équivalence

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\, z = e^{i.2\pi\frac{k}{n}}$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et expliquer l'équivalence

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,\dots,n-1\},\, z = e^{2i\pi\frac{k}{n}}$$

L'ensemble des nombres complexes vérifiant l'équation $z^n = 1$ est appelé l'ensemble des *racines n-ièmes de l'unité*. Il comporte exactement n éléments dont 1.
3. Résoudre l'équation $z^n = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On pourra chercher une solution particulière $z_0 \neq 0$ et utiliser le fait que

$$z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$

Exercice 16.—On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.
2. Soit $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer [3] $F.\overline{F}$ et en déduire F^{-1}

Exercice 17.— On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
1. Que vaut ω^5 ? Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Placer sur un dessin les nombres complexes 1, ω, ω^2, ω^3, ω^4.
3. On pose $\alpha = \omega + \omega^4$, $\beta = \omega^2 + \omega^3$. Vérifier que $1 + \alpha + \beta = 0$ et montrer que α et β sont racines d'un même polynôme P de degré 2.
4. Que valent α et β ? Que vaut $\cos\frac{2\pi}{5}$?
5. Proposer une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

Exercice 18.— Soit $\omega = \exp(i2\pi/n)$ avec n un entier strictement positif.
Calculer $\sum_{k=1}^{n} \omega^{kp}$ (avec $p \in \mathbb{N}$) puis $\sum_{k=1}^{n} \left(z + \omega^k\right)^n$ où z est un complexe quelconque.

2. Mais source inépuisable d'exercices
3. $\overline{F}$ est la matrice dont les entrées sont les conjuguées de celles de F

Applications en géométrie plane.

Module et argument d'un nombre complexes ont des interprétations évidentes en termes de géométrie place euclienne.

— Si A et B sont deux points du plan d'affixes resp. z_A et z_B alors[4] $|z_A - z_B|$ est la distance entre A et B.
— Si A,B et C sont trois points du plan d'affixes resp. z_A, z_B et z_C alors un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - Z_B}$ est une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{BA}, \vec{BC})$.
— Si $A_j, j \in \{1,\dots,N\}$ sont N points du plan, $p_j, j \in \{1,\dots,N\}$, N nombres réels vérifiant $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$ alors le barycentre B des points $A_j, j \in \{1,\dots,N\}$ affectés des coefficients $p_j, j \in \{1,\dots,N\}$ a pour affixe
$$z_B = \sum_{j=1}^{N} p_j.A_j$$
En particulier, le milieu de deux points A et B a pour affixe $\frac{1}{2}z_A + \frac{1}{2}z_B$, le centre de gravité d'un triangle ABC (intersection des médianes) a pour affixe $\frac{1}{3}z_A + \frac{1}{3}z_B + \frac{1}{3}z_C$

Exercice 19.— Soient A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Montrer l'inégalité (De quelle inégalité du cours est-elle la variation directe ?)
$$|z_A - z_C| \leq |z_A - z_B| + |z_B - z_C|$$
et en donner une interprétation géométrique. (Pourquoi l'inégalité en question porte-t-elle ce nom ?)

Exercice 20.— Lieux géométriques

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
1.a. $|z - 3i| = 5$ **1.b.** $z\bar{z} = 4$ **1.c.** $\arg z \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ **1.d.** $\arg z = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ **1.e.** $z + \frac{1}{z}$ soit réel.

Exercice 21.— Conditions géométriques exprimées en termes d'affixes

Soient trois points A,B et C d'affixes respectives a,b,c. Déterminer :

1. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A,B et C soient alignés.
2. Une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 22.— On considère, dans le plan, trois points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
1. Montrer que A, B et C sont non alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(z_A - z_B)\overline{(z_A - z_C)} \neq 0$.
2. On suppose A, B et C non alignés et on considère le point Ω d'affixe
$$z_\Omega = z_A + \frac{(z_A - z_C)(z_A - z_B)\overline{(z_C - z_B)}}{\overline{(z_A - z_C)}(z_A - z_B) - (z_A - z_C)\overline{(z_A - z_B)}}$$
Montrer que $|z_\Omega - z_A| = |z_\Omega - z_B| = |z_\Omega - z_C|$.
3. Interprétation géométrique ?

4. en application directe du théorème de PYTHAGORE,

Python et représentations graphiques

En Python, directement et sous `numpy`, alias `np`, on peut calculer en nombres complexes directement en utilisant les opérations usuelles. Le nombre complexe fondamental i est noté `1j` donc, par exemple, `1+np.sqrt(3)*1j` est le nombre complexe $1+\sqrt{3}.i$.

Listing 1 – python/demo-complexes.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
z=1+np.sqrt(3)*1j
w=complex(-np.sqrt(2),np.sqrt(2)) #declare w=-racine(2)+i*racine(2)
print("z=",z,"partie réelle de z=",z.real,"partie imaginaire de z=",z.imag)
print("z=",z,"conjugué de z=",z.conj(),"partie imaginaire de z=",z.imag)
print("z=",z,"module de z=",np.abs(z),"argument de z=",np.angle(z))
print("w*z=",w*z,"partie réelle de w*z=",(w*z).real, \
      "partie imaginaire de w*z=",(w*z).imag)
print("w*z=",w*z,"module de w*z=",np.abs(w*z),"argument de w*z=",np.angle(w*z))
#En ndarray, racines n-iemes de l'unité
n=10
un=np.array([np.exp(1j*2*k*np.pi/n) for k in range(n)])
print("les modules des u_n valent",np.abs(un))
print("les parties réelles des u_n valent",un.real)
#rep. graphique : séparer parties réelles et parties imaginaires
fig,ax=plt.subplots()
ax.set_aspect("equal") #Pour repère visuellement orthonormé
plt.plot(un.real,un.imag)
plt.show()
```

Ce script, qui présente l'utilisation des nombres complexes en Python, se conclut sur une façon de représenter graphiquement un `ndarray` unidimensionnel de nombres complexes : il s'agit d'utiliser la commande `plt.plot` usuelle après avoir extrait parties réelles et parties imaginaires de la liste. D'un point de vue esthétique, il vaut mieux avoir une représentation en repère orthonormé visuellement.

Exercice 23.— Suite définie par une récurrence homographique

On considère la fonction f de variable complexe définie par la formule $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?

2. Résoudre successivement les équations, d'inconnue $z\in D_f$, $f(z)=1$, $f(z)=0$, $f(z)=-1$.

3. Chercher les points fixes de f, i.e les solutions de l'équation $f(z)=z$ d'inconnue $z\in D_f$. Sans trop de calculs, il y en a probablement deux, pourquoi ? Les trouver explicitement et les nommer α et β.

4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $z_0\in\mathbb{C}$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\, z_{n+1}=f(z_n)$$

4.a. Pour quelles valeurs de z_0 cette suite n'est-elle pas bien définie ?

On exclut dorénavant ces cas.

4.b. Montrer que s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $z_n=\alpha$ ou $z_n=\beta$ alors la suite z_n est constante.

On exclut dorénavant les cas $z_0=\alpha$ et $z_0=\beta$.

5. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}$.

Après avoir exprimé z_n en fonction de u_n, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. Donner une formule fermée pour z_n en fonction de n.

Exercice 24.—Calculer et représenter graphiquement en Python la suite récurrente de l'exercice 23 pour une valeur de z_0 au choix.