Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2023-2024**

Révisions/Formulaire 04bis

Révisions Algèbre: Nombres complexes: Matrices

Nombres complexes

Exercice 1.—Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, tout $\alpha \in \mathbb{C}$, α racine de $P \Leftrightarrow \overline{\alpha}$ racine de P.

Systèmes linéaires et calcul matriciel

Exercices

Exercice 2.— On considère les systèmes suivants :

$$\text{(I)}\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z & = & -2 \\ x+2y+5z & = & 5 \\ 5x+8y+3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{(II)}\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+2z & = & \lambda x \\ 3x-2y+3z & = & \lambda y \\ 2x-2y+3z & = & \lambda z \end{array}\right. \ (\lambda \text{ est un paramètre}).$$

1. Donner l'écriture matricielle de ces systèmes. Les interpréter en termes d'application linéaires.
2. Résoudre ces deux systèmes en utilisant la méthode du pivot de GAUSS (pour (II), commencer par échanger la ligne 3 et la ligne 1).

Exercice 3.— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Appliquer la méthode du pivot de GAUSS pour résoudre le système d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left\{\begin{array}{llllcl} (1-\lambda)x & -y & +z & & = & 0 \\ -x & +(1-\lambda)y & -z & & = & 0 \\ x & -y & +(1-\lambda)z & & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4.— En utilisant la méthode du pivot de GAUSS, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si c'est le cas, calculer leur inverse, sinon, donner leur rang :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Comment interpréter ceci sur les applications linéaires $\phi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto A.X$ et $\phi_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, X \mapsto B.X$?

Exercice 5.— Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Pour chacun de ces systèmes, on précisera la matrice du système, son rang et une base de son noyau.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+3z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z+t=0 \\ 3x+y+z+t=1 \\ 2x+y+2z+2t=2 \\ 3x+y+2z+t=-1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z+t=0 \\ 3x+y+z+t=1 \\ 2x+y+2z+2t=2 \\ 3x+y+2z+2t=-1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x-2y+z+2t=0 \\ 2x+y+z+t=1 \\ x+y+2z+t=2 \end{array}\right.$$

Exercice 6.— Rappeler la formule du déterminant d'un système linéaire 2×2 et la formule de l'inverse d'une matrice 2×2.

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Résoudre à l'aide de ces formules le système d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} e^{\alpha}x & +e^{\beta}y & = & 1 \\ -e^{-\beta}x & +e^{-\alpha}y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 7.— Soit $f(x)=\lambda.e^x\cos x+\mu.e^x\sin x$. Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ pour que

$$f(x_0)=1 \text{ et } f'(x_0)=1.$$

Exercice 8.— Soit $m\in\mathbb{R}$ un réel fixé. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ en discutant éventuellement suivant les valeurs du paramètre m. Préciser la matrice du système, son rang et une base de son noyau.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ mx+y+z=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (m-1)x+my+z=m+1 \\ mx+2y+3z=3 \\ (m+1)x+my+(m-1)z=m-1 \end{array}\right.$$

Exercice 9.— Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les points $A=(1,2,3)$ et $B=(2,4,8)$. Donner un système d'équations linéaires avec second membre admettant tous les points de la droite AB, et eux seuls, comme solutions.

Exercice 10.— Peut-on déterminer des réels x,y pour que le vecteur $v=(-2,x,y,3)$ appartienne au s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (e_1,e_2) où $e_1=(1,-1,1,2)$ et $e_2=(-1,2,3,1)$?

Exercice 11.— Soient $e_1=(0,1,-2,1), e_2=(1,0,2,-1), e_3=(3,2,2,-1)$ et $e_4=(0,0,1,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}\langle e_1,e_2,e_3\rangle=\mathrm{Vect}\langle(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\rangle$.
2. $(1,1,0,0)\in\mathrm{Vect}\langle e_1,e_2\rangle\cap\mathrm{Vect}\langle e_2,e_3,e_4\rangle$.

Exercice 12.— On considère la matrice :

$$M=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2 et montrer qu'on peut écrire M^2 comme combinaison linéaire de M et de I_3. En déduire que M est inversible et donner son inverse.

Exercice 13.— Pour la matrice suivante, calculer A^3 et en déduire que A n'est pas inversible.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.— Calculer A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.— Calculer, pour $n \geq 2$, A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.— Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A la somme des éléments diagonaux de A, c'est-à-dire :

$$\text{Si } A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \text{ alors } \operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que pour toutes les matrices A et B carrées de taille n et tous les scalaires λ, $\operatorname{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$.
2. Montrer que pour toutes les matrices A et B carrées de taille n, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$. Indication:Appeler $C = A.B$, $D = B.A$ et écrire les formules abstraites de produit matriciel donnant les coefficients C_{ij} et D_{ij}
3. En déduire qu'il n'existe pas de matrices A et B carrées de taille n telles que $AB - BA = I_n$.