Corrections choisies 01

Fonctions réelles de deux variables réelles

Correction Ex.–7 On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, f(x,y) = x^3 + y^3 + x.y$$

1. La fonction f est poluynomiale sur $\mathbb{R}^2$, elle y est donc de classe $\mathscr{C}^2$. On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2 + x$$

Un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est critique pour f si et seulement si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

c'est à dire

$$3x^2 + y = 0 \text{ et } 3y^2 + x = 0$$

i.e.

$$y = -3x^2 \text{ et } 27x^4 + x = 0$$

Il y a donc (fin de la réoslution) deux points critiques ($27x^3 + 1 = 0$ ssi $x - \frac{1}{3}$) :

$$(x,y) = (0,0),\, (x,y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})(x =$$

Les valeurs critiques sont donc

$$f(0,0) = 0 \text{ et } f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

2. En effectuant le changement de variables $x = u + v$, $y = u - v$, on a (binômes de NEWTON d'exposant 3)

$$g(u,v) = f(u+v, u-v) = (u+v)^3 + (u-v)^3 + u^2 - v^2 = 2u^3 + u^2 + (6u-1)v^2$$

3. On a, en utilisant la factorisation $\frac{1}{27} - 2u^3 - u^2 = \frac{1}{27}(3u+1)^2(1-6u)$.), pour un couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
g(u,v) = \frac{1}{27} \quad &\Leftrightarrow \quad (1-6u)v^2 + \frac{1}{27} - 2u^3 - u^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-6u)v^2 + \frac{1}{27}(3u+1)^2(1-6u) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-6u)\left[v^2 + \frac{1}{27}(3u+1)^2\right] \\
&\Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{6} \text{ ou } (v = 0 \text{ et } u = -\frac{1}{3})
\end{aligned}$$

La ligne de niveau $\frac{1}{27}$ et donc la réunion du singleton $\{(-\frac{1}{3}, 0)\}$ et de la droite d'équation

On a donc, en lisant en les variables (x,y) (noter que la transformation $(x,y) \mapsto (u,v)$ est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$)

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \frac{1}{6} \text{ ou } (x = y \text{ et } x = -\frac{1}{3})$$

La ligne de niveau $+\frac{1}{27}$ de f est donc la réunion du singleton $\{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})\}$ et de la droite d'équation $x + y = \frac{1}{6}$.

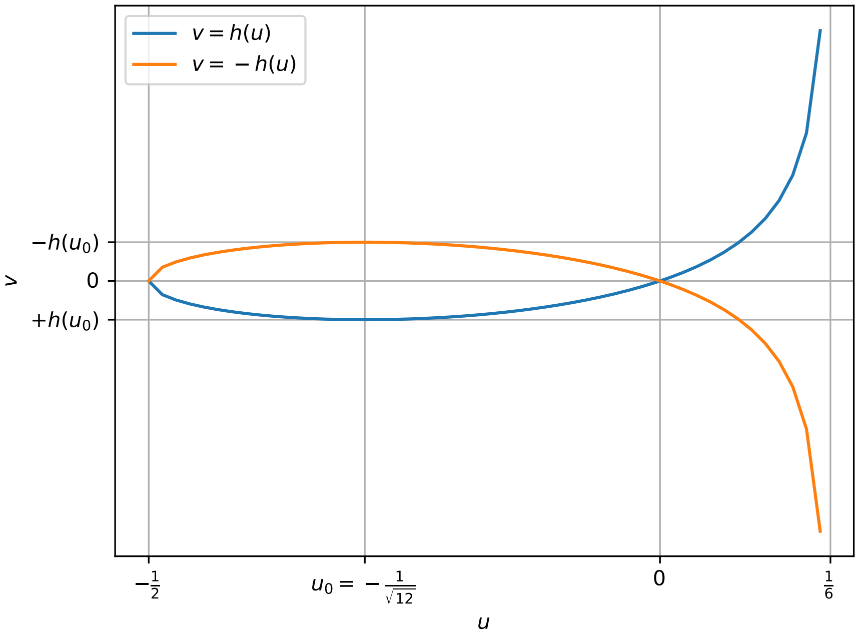

FIGURE 1 – Les graphes $v = h(u)$ et $v = -h(u)$ tracés à la machine.

4. Pour un couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g(u,v) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2u^3 + u^2 + (6u-1)v^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u \neq \frac{1}{6} \text{ et } v^2 = \frac{2u^3+u^2}{1-6u} = u^2\frac{2u+1}{1-6u} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq u < \frac{1}{6} \text{ et } v = \pm u\sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}} \end{aligned}$$

On peut poser $h(u) = u\sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}}$ pour $u \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right[$ et étudier cette fonction d'une variable réelle pour en tracer le graphe :

La fonction h est continue sur son intervalle de définition et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right[$ (l'argument de $\sqrt{\ }$ est > 0 sur cet intervalle) . On a (dérivée de composée)

$$\forall u \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right[, h'(u) = \sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}} + u.\frac{2(1-6u)+6(2u+1)}{(1-6u)^2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1-6u}{2u+1}}$$

et donc

$$\forall u \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right[, h'(u) = \sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}}\left\{1 + u.\frac{4}{(1-6u)^2}.\frac{1-6u}{2u+1}\right\} = \sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}}\left\{1 + u.\frac{4}{(1-6u)(2u+1)}\right\}$$

$$\forall u \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right[, h'(u) = \sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}}\frac{1}{(1-6u)(2u+1)}\{(1-6u)(2u+1)+4u\} = \sqrt{\frac{2u+1}{1-6u}}\frac{1}{(1-6u)(2u+1)}\{1-12u^2\}$$

Cette factorisation de $h'(u)$ fait clairement apparaitre le signe de $h'(u)$ comme étant celui de $1-12u^2$ et donc dépend de la position de u par rapport aux racines $u_0 := -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $+\frac{1}{2\sqrt{3}}$ de ce trinôme (remarquer que cette deuxième racine est $\geq \frac{1}{6}$)

On a donc le tableau de variations de h :

u	$-\frac{1}{2}$		$u_0 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$		$\frac{1}{6}$
$h'(u)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$h(u)$	0	$\searrow$	$h(u_0)$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

On peut remarquer que $h(0) = 0$. Et tracer le graphe de h (et celui de $-h$).

5. Il reste à changer de variables pour obtenir la ligne de niveau 0 de f

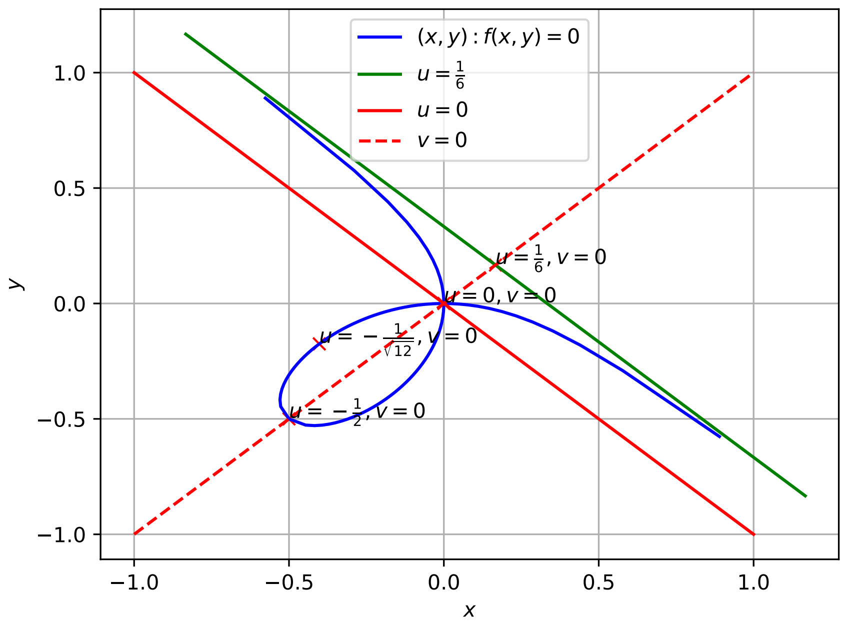

FIGURE 2 – La ligne de niveau 0 de f.

Correction Ex.–10 Soit $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, α, β des nombres réels non nuls. On pose pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=f(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)$. Déterminer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$

Pour calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$, on fixe u et on dérive par raport à v pour obtenir la première dérivée partielle :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \quad = \quad \beta\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)-\beta\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)$$

On recommence pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) \quad = \quad & \beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)-\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)\\ & -\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)+\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)\end{aligned}$$

En faisant de même, on détermine $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) \quad = \quad & \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)+\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)\\ & +\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)+\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)\end{aligned}$$

On peux maintenant simplifier (on utilise le théorème de SCHWARZ sur l'égalité des dérivées secondes croisées) $\alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-\beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ en

$$-4(\alpha^2.\beta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)$$

Résoudre l'équation d'inconnue $g\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \alpha^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)-\beta^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0.$$

revient donc à résoudre l'équation d'inconnue $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\alpha.u+\beta.v,\alpha.u-\beta.v)=0.$$

Ce qui, la transformation linéaire $(u,v) \mapsto (x,y) = (\alpha.u+\beta.v, \alpha.u-\beta.v)$ étant bijective de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même (son déterminant est $\alpha^2+\beta^2>0$) revient à résoudre l'équation d'inconnue $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

On peut résoudre ceci par double primitivation : Comme, à y fixé, la fonction partielle de la dérivée partielle $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$, on en déduit qu'il existe $f(y)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(y)$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction f ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

En fixant x, on peut maintenant, en primitivant f en F, affirmer l'existence de $g(x)$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = F(y) + g(x)$$

Comme $x \mapsto f(x,y)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi. On a donc résolu (analyse) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

en $\exists F, G \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = F(y) + G(x)$$

On peut vérifier (synthèse) que les fonctions de ce type sont évidemment solutions de problème.

On peut maintenant revenir en les variables (u,v) :

La fonction $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) - \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$$

si et seulement si il existe deux fonctions F et G, $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = F(\alpha.u-\beta.v) + G(\alpha.u+\beta.v)$$

C'est un résultat très classique en physique qu'une solution de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^2$ s'écrive comme somme d'une onde « progressive » et d'une onde « régressive »