**Lycée Pierre-Gilles de Gennes** **BCPST**
**Mathématiques** **2023-2024**

---

# Notes de cours 03

Intégrales généralisées

---

## Table des matières



## 1 Fonction continue sur un intervalle ; intégrale entre deux bornes

### 1.1 Un rappel, ce qu'on cherche à faire

Contexte : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, $f$ une fonction à valeurs réelles, complexes,...définie sur $I$. Si $f$ est *continue* sur $I$ alors $f$ y admet une primitive $F$.

**Definition 1.** Si $f$ est continue sur $I$, $a,b \in I$, l'intégrale *au sens classique* de $f$ de $a$ à $b$ est définie par

$$\int_a^b f(t)\, dt := F(b) - F(a)$$

On va donner une extension de la définition du symbole $\int_a^b f(t)\, dt$ lorsque

1. $f$ n'est pas continue (ou même définie) sur $[a,b]$ ou $[b,a]$ mais l'est sur $]a,b[$. On autorise notamment (mais pas seulement) que $f$ soit *non bornée* sur $]a,b[$.
2. soit $a$, soit $b$ vaut l'un des deux infinis
3. dans des cas mixtes

*Il s'agit de donner une "extension" du symbole d'intégration à des cas plus larges que ceux déjà connus, tout en conservant les principales propriétés.*

Si la fonction $f$ est à valeurs positives, $a \leq b$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ s'interprète géométriquement comme l'aire comprise entre le graphe de $f$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$. ( *cf.* Fig. 1)

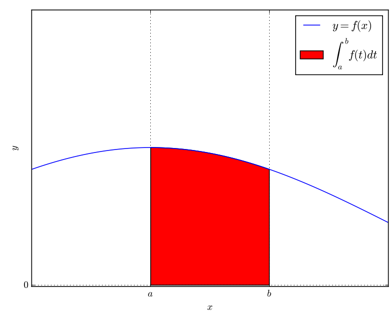
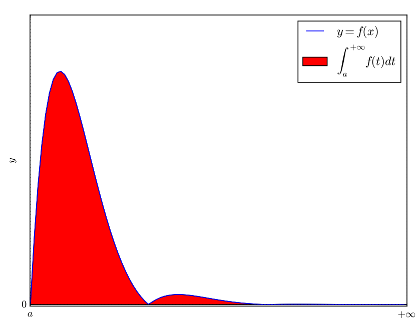
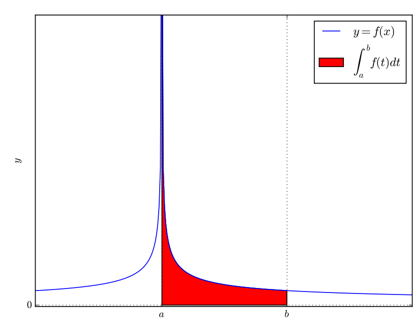



FIGURE 1 – Aire et intégrale

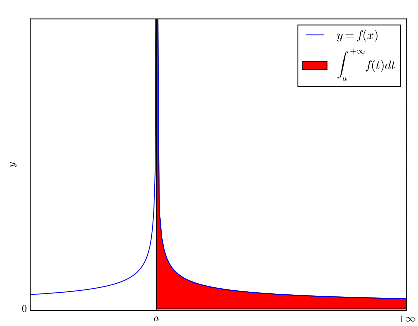
On va donner un sens aux aires et intégrales suivantes *cf.* Figs. 2a,2b, 2c et 2d.



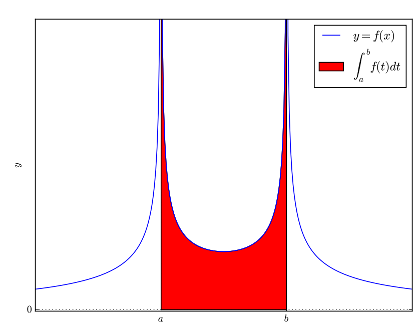

(a) Aire et intégrale, une longueur infinie




(b) Aire et intégrale, une longueur infinie




(c) Aire et intégrale, deux longueurs infinies




(d) Aire et intégrale, deux longueurs infinies

FIGURE 2 – Aires et longueur(s) infinie(s)

## 1.2 Une limite

**Le mécanisme fondamental**

**Proposition 1.** *Si $f$ est continue sur $I$, $a, b \in I$,*

$$\lim_{x \in I, x \to b} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

Cette remarque élémentaire ouvre la porte à une stratégie :

1. Déplacer un peu une borne pour récupérer de la continuité et/ou un intervalle borné
2. Revenir à la position initiale par un mécanisme de limite

On a bien évidemment, sous les mêmes conditions, que

$$\lim_{x \in I, x \to a} \int_x^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

# 2 Intégrales généralisées, différents cas

## 2.1 Intervalle borné à gauche, non borné à droite

On se place dans le cas de la figure 2a où $I = [a, +\infty[$.

**Définition 2: Convergence d'une intégrale généralisée**

Soit $f$ une fonction continue sur $I = [a, +\infty[$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est **convergente** si

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\, dt$$

existe et est **finie**.
La **valeur** de $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est la valeur de cette limite.
Dans le cas où la limite n'existe pas ou est infinie, on dit que l'intégrale généralisée est **divergente**.

Quelques remarques :

1. Le cas symétrique où $I = ]-\infty, b]$ doit être clair, les cas où on intègre de $+\infty$ vers $a$ ou de $b$ vers $-\infty$ aussi.
2. En termes de primitives, si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a, +\infty[$, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge si et seulement si $F$ admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas, la valeur de l'intégrale généralisée est

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \quad = \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a) \overset{\text{notation}}{=:} [F(t)]_a^{+\infty} \text{ « au sens des limites »}$$

3. Le vocabulaire est parfois changeant. On parle d'intégrales généralisées ou **impropres**. En cas d'intégrale convergente, on dit aussi que cette intégrale **existe au sens des intégrales généralisées**, ou que cette intégrale **converge**.
   Finalement, la convergence d'une telle intégrale assure que le symbole $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est **bien défini** en tant que nombre. *i.e.* , on peut s'en servir comme d'un nombre, l'additionner à d'autres nombres, etc...

**Exemple 1**

Q :Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

est convergente et donner sa valeur.

R :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$

*Démonstration.* 1. **Rédaction avec borne finie puis passage à la limite.** La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est définie, continue sur $[1, +\infty[$. Considérer l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est légitime (bien définie).

Pour $x > 1$, *destiné à tendre vers* $+\infty$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et donc

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} \to 1$$

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente et

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$

2. **Rédaction avec crochet au sens des limites.** On a, sous réserve d'existence de la limite à droite,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} \text{« au sens des limites »}$$

Or $\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 1$ et donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente avec pour valeur,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$$

□

**Exemple 2**

Q :Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

est bien définie, convergente et donner sa valeur.

R :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

*Démonstration.* La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est définie, continue sur $[0,+\infty[$. Considérer l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est légitime.

Pour $x > 0$, *destiné à tendre vers* $+\infty$, on a

$$\int_0^x e^{-t}\,dt \quad = \quad \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - \underbrace{e^{-x}}_{\overset{x\to\infty}{\to} 0} \overset{x\to\infty}{\to} 1$$

Donc, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$$

□

**Exemple 3**

Q : Que dire de la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

R : Cette intégrale généralisée est divergente (vers $+\infty$).

*Démonstration.* La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est définie, continue sur $[1,+\infty[$. Il est donc légitime de considérer cette intégrale généralisée. Pour $x > 1$, destiné à tendre vers $+\infty$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t} \quad = \quad [\ln t]_1^x = \ln x$$

Donc, comme $\ln x$ n'a pas de limite finie lorsque $x \to +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale généralisée divergente.

□

CHASLES

**Proposition 3.** *Si $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f$ continue sur $[a,+\infty[$. On a équivalence entre*

1. *$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.*
2. *$\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.*

*Dans le cas de convergence de l'une ou l'autre, on a*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt$$

*Démonstration.* Soit $X \in [a,+\infty[$, $X$ destiné à tendre vers $+\infty$. L'hypothèse est donc que $\int_a^X f(t)\,dt$ admet une limite lorsque $X \to +\infty$. On a alors

$$\int_b^X f(t)\,dt = \underbrace{\int_b^a f(t)\,dt}_{\text{cste}/X} + \underbrace{\int_a^X f(t)\,dt}_{\text{CV qd } X \to +\infty}$$

Le théorème sur les limites de sommes s'applique et l'on obtient que

$$\int_b^{+\infty} f(t)\,dt := \underbrace{\lim_{X\to+\infty} \int_b^X f(t)\,dt}_{\text{existe}} = \int_b^a f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

□

**Exercice 1.—** Intégrale convergente et limite nulle à l'$\infty$.

On suppose que la fonction $f$, continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles à une limite $\ell$ non nulle en l'infini. Montrer qu'alors $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est divergente. Indication:Séparer les cas $\ell > 0$ et $\ell < 0$ et, dans le premier cas, minorer $f$ par $\ell/2$ sur un intervalle adéquat en utilisant la définition de limite.

**Exercice 2.—** L'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(x)\, dx$ est-elle convergente ?

NB : L'intégrande n'a pas de limite en $+\infty$, ce n'est pas pour autant que l'on peut en déduire que l'intégrale généralisée en question est divergente. Par exemple, (techniques d'i.p.p. hors esprit du programme, *cf.* §4.3), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\, dx$ est convergente sans que l'intégrande ait une limite en $+\infty$.

## 2.2 Une singularité à l'extrémité d'un intervalle borné

On s'intéresse au cas $I = ]a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f \in \mathscr{C}^0(]a,b])$

### Intégrale faussement impropre

Lorsque $I = ]a,b]$, pour $a < b$ et la fonction $f \in \mathscr{C}^0(]a,b])$ se prolonge par continuité en $a$ à droite. On peut appliquer la proposition 1 et le procédé de calcul d'intégrale par déplacement de la borne au prolongement par continuité de $f$

Un exemple archétypal : le symbole $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$ définit un nombre réel par ce procédé,

1. $f : t \in I = ]0,\pi] \mapsto f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est bien définie, $\mathscr{C}^0(I)$,
2. $f$ se prolonge par continuité sur $[0,\pi]$ en posant $f(0) = 1$.
3. L'intégrale $\int_0^{\pi} f(t)\, dt$ a un sens *classique* et, par la proposition 1, c'est la limite, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, de

$$S_\varepsilon := \int_\varepsilon^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

il vaut

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt := \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

D'un point de vue pratique, on justifie la bonne définition du symbole en soulignant que l'intégrande se prolonge par continuité sur $[0,\pi]$ et que l'on a donc affaire à une **intégrale faussement impropre**.

Utiliser le script `python/sinxoverx.py` pour produire la figure 3.

**Exercice 3.—**

**1.** L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

**2.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $H_n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}$$

Montrer rapidement que $H_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, préciser sa valeur en 0. (A la maison : tracer, en Python, le graphe de $H_n$ pour quelques valeurs de $n$ s'échelonnant de 2 à 25)

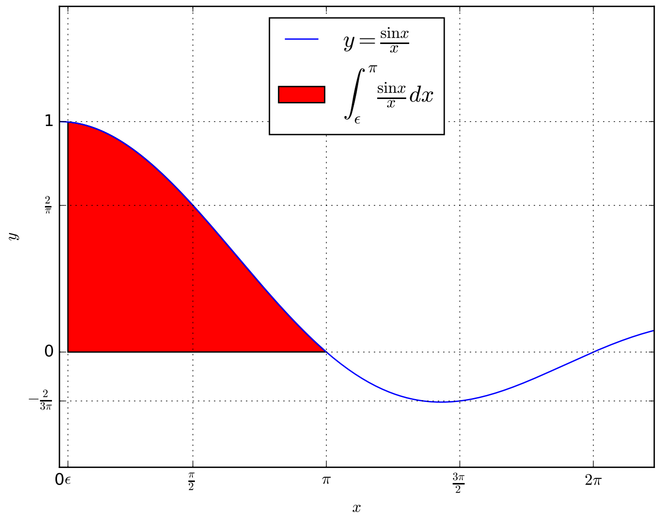



FIGURE 3 – Le graphe de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

**3.** Que vaut la limite lorsque $n \to +\infty$ de $H_n(\frac{1}{n})$ ? Est-elle nulle ?

### Intervalle borné, singularité à une extrémité

**Définition 4**

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et supposons seulement que $f$ est continue sur $]a,b]$. On dit que l'intégrale **généralisée** $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ est **convergente** si

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

existe et est **finie**.
La **valeur** de $\int_a^b f(t)\, dt$ est la valeur de cette limite.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée est **divergente**.

1. Le cas symétrique où $f$ est seulement continue sur $[a,b[$ doit être clair, les cas où $a > b$ aussi. On rappelle que
$$\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt$$
2. En termes de primitives, si $F$ est une primitive de $f$ sur $[a,b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ converge si et seulement si $F$ admet une limite finie en $b$, *i.e.* si et seulement si $F$ se prolonge par continuité en $b^-$ par $\tilde{F}(b)$. Dans ce cas, la valeur de l'intégrale généralisée est
$$\int_a^b f(t)\, dt \overset{\text{notation}}{=:} [F(t)]_a^b \text{« au sens des limites »}$$
3. La convergence d'une telle intégrale assure que le symbole $\int_a^b f(t)\, dt$ est **bien défini** en tant que nombre.

**Exemple 1**

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge ( *i.e.* existe au sens des intégrales généralisées) et vaut 2, *i.e.*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

*Démonstration.* En effet, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$ et, pour $0 < x < 1$, destiné à tendre vers 0,

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad = \quad \left[2\sqrt{t}\right]_{t=x}^{t=1} = 2 - \underbrace{2\sqrt{x}}_{\overset{x\to 0^+}{\to} 0}$$

Donc

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad = \quad \left[2\sqrt{t}\right]_{t=x}^{t=1} \to 2 \text{ lorsque } x \to 0^+$$

□

**Exemple 2**

Q : que dire de $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ au sens des intégrales généralisées ? R : Cette intégrale généralisée est divergente vers $+\infty$

*Démonstration.* $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $]0,1]$ et, pour $0 < X < 1$, destiné à tendre vers 0,

$$\int_X^1 \frac{dx}{x^3} \quad = \quad \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_X^1 = -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2X^2}}_{\overset{X\to 0^+}{\to} +\infty}$$

Donc, $\int_X^1 \frac{dx}{x^3}$ n'a pas de limite finie lorsque $X \to 0^+$ et l'intégrale généralisée considérée diverge (vers $+\infty$) □

**Exemple 3**

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Cet exemple montre comment l'on peut appliquer les techniques usuelles du calcul intégral pour arriver à nos fins

*Démonstration.* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ et, pour $0 < x < 1$, par le changement de variable $t = \sin u$, $u \in [0, \arcsin x]$, $dt = \cos u \, du$, $du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad = \quad \int_0^{\arcsin x} du = \arcsin x$$

Donc

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \to \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ lorsque } x \to 1^-$$

□

CHASLES

**Proposition 5.** *Si $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $f$ continue sur $]a,b]$. On a équivalence entre*

1. *$\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.*
2. *$\int_a^c f(t)\ dt$ est convergente.*

*Dans le cas de convergence de l'une ou l'autre, on a*

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt.$$

La démonstration est sur le même modèle que la proposition analogue dans le cas $I$ non borné.

## 2.3 Deux problèmes à gérer de concert

Considérons le cas $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f$ continue sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente si, pour un certain $a < c < b$, *chacune* des intégrales $\int_a^c f(t)\ dt$ et $\int_c^b f(t)\ dt$ est convergente. En ce cas, la valeur de l'intégrale est

$$\int_a^b f(t)\ dt := \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt$$

Remarque : la valeur de $c$ importe peu (CHASLES) et il suffit en fait que $\int_a^c f(t)\ dt$ et $\int_d^b f(t)\ dt$ soient convergentes pour certains $c,d \in ]a,b[$.

Considérons le cas $f$ continue sur $\mathbb{R}$.

**Définition 6**

On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente si, pour un certain $c \in \mathbb{R}$, *chacune* des intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente. En ce cas, la valeur de l'intégrale est

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt := \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt + \int_c^{+\infty} f(t)\ dt$$

**Exemple 1**

Q : Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ dt$ est convergente et donner sa valeur. R :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ dt = 2$$

*Démonstration.* la fonction $t \mapsto e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a, pour $X > 0$, $X' < 0$

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-|t|}\ dt &= \int_0^X e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^X \overset{X \to +\infty}{\to} 1 \\ \int_{X'}^0 e^{-|t|}\ dt &= \int_{X'}^0 e^{+t}\ dt = \left[e^{+t}\right]_{X'}^0 \overset{X' \to -\infty}{\to} 1 \end{aligned}$$

Chacune des intégrales $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|}\ dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\ dt$ est convergente, vaut 1 et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\ dt = 2$$

□

**Exemple 2**

Q : Déterminer la nature, convergente ou divergente de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

R : Cette intégrale est divergente.

*Démonstration.* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On étudie chacune des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ : la première est convergente, la seconde est divergente et donc l'intégrale proposée est divergente. □

**Exercice 4.—** Intégrales de RIEMANN en 0 et à l'$\infty$.

**1.** Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in ]0,+\infty[$ de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

et donner, en cas de convergence, sa valeur.

**2.** Idem avec les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On tracera les graphes des intégrandes et marquera les aires calculées par ces intégrales.

**Exercice 5.—** Etudier la nature des intégrales suivantes (on commencera par analyser et localiser les singularités de l'intégrande). En cas de convergence, calculer la valeur de l'intégrale.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^t \, dt, I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \, dt, I_4 = \int_{-1}^1 \frac{t \, dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx, I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)}, I_7 = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \left((a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b\right).$$

# 3 Propriétés héritées de l'intégrale usuelle

On se place dorénavant dans le cas où $f$, $g$, sont continues sur l'intervalle $]a,b[$ ou $]b,a[$, $a$, $b$ étant des nombres ou les symboles $\pm\infty$.

## 3.1 Linéarité et croissance

### Linéarité

**Proposition 7**

Si $\lambda, \mu$ sont deux complexes et si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes alors

$$\int_a^b (\lambda.f+\mu.g)(t)\,dt$$

est *convergente* et

$$\int_a^b (\lambda.f+\mu.g)(t)\,dt = \lambda.\int_a^b f(t)\,dt + \mu.\int_a^b g(t)\,dt$$

*Démonstration.* A faire soi-même en utilisant la linéarité de l'opération « passage à la limite ». □

Exemple : Montrer que $\int_0^1 \frac{3t-2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente et déterminer si $\int_0^1 \frac{3t-2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \,?, <0\,?, >0\,?$

*Démonstration.* Il s'agit de voir à l'avance comment on va faire la décomposition en morceaux convergents et calculables.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$, tend vers $+\infty$ en $1^-$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ peut être considérée au sens généralisé. Comme $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{d}{dt}(\sqrt{1-t^2})$, pour $X \in ]0,1[$, on a donc
$$\int_0^X \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad = \quad -\left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^X \overset{X\to 1^-}{\to} 1$$
*i.e.*
$$\underbrace{\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}_{\text{CV}}\,dt = 1$$

2. On a $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$, tend vers $+\infty$ en $1^-$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ peut être considérée au sens généralisé. Comme $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{d}{dt}(\arcsin t)$, pour $X \in ]0,1[$, on a donc $\displaystyle\int_0^X \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = [\arcsin t]_0^X \overset{X\to 1^-}{\to} \frac{\pi}{2}$ *i.e.* $\displaystyle\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\text{CV}} = \frac{\pi}{2}$

3. Finalement, par linéarité, on a
$$3.\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - 2.\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{3t-2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\text{CV}} = 3-\pi$$

□

Remarquons que ce qu'on vient de faire demande beaucoup (trop ?) d'anticipation sur la façon dont se font les calculs. Au niveau de la rédaction, on peut procéder à un calcul « avec réserves », en rédigeant de la sorte :

*Par linéarité,*

$$\int_0^1 \frac{3t-2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \overset{\text{CV ?}}{=} 3.\underbrace{\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\text{CV ?}} - 2.\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{\text{CV ?}}$$

*sous réserve de CV des deux intégrales du membre de droite de cette égalité.*

Ensuite, on passe *vraiment* un certain temps à lever les réserves

— L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente et vaut .... car ....

— L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente et vaut .... car ....

— et donc ...

La rédaction n'est pas plus courte mais elle suit un flux peut-être plus naturel.

**Positivité/Croissance**

**Proposition 8** (Positivité)**.** *Soit $f$, continue, positive, à valeurs réelles, sur $]a,b[$, $a<b$. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge,*

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$$

**Proposition 9** (Cas de nullité)**.** *Soit $f$, continue, positive, à valeurs réelles, sur $]a,b[$. Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f=0$ sur $]a,b[$.*

*Démonstration.* Supposons, pour donner l'idée, que $b=+\infty$ et que $f$ est continue sur $[a,+\infty[$. Soit $X \in [a,+\infty[$, destiné à tendre vers $+\infty$. On a, au sens classique,

$$\int_a^X f(t)\,dt \geq 0$$

Comme le passage à la limite conserve les inégalités (larges), il vient, une fois effectué le passage à $X \to +\infty$,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geq 0$$

Remarquons pour finir que la fonction $X \mapsto \int_a^X f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,+\infty[$. On peut le voir par dérivation ou, plus simplement, par CHASLES, en remarquant que si $X, X' \in [a,+\infty[$, $X \leq X'$,

$$\int_a^{X'} f(t)\,dt \quad = \quad \underbrace{\int_X^{X'} f(t)\,dt}_{\geq 0 \text{ car } f \geq 0 \text{ et } X \leq X'} + \int_a^X f(t)\,dt \geq \int_a^X f(t)\,dt$$

Une conséquence de ceci est que, pour tout $X \in [a,+\infty[$, $0 \leq \int_a^X f(t)\,dt \leq \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

Supposons maintenant que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = 0$. Ceci montre que pour tout $X \in [a,+\infty[$,

$$0 = \int_a^X f(t)\,dt$$

et donc, en dérivant, cette égalité de fonctions, que pour tout $X \in [a,+\infty[$, $f(X)=0$.

$\square$

Une fois que l'on a linéarité, positivité et cas de nullité, on a automatiquement les deux propositions suivantes (on reverra ceci pour les espérances de v.a., les sommes de séries,..)

**Proposition 10** (Croissance)**.** *Soient $f$, $g$, continues, à valeurs réelles, sur $]a,b[$, $a<b$. Supposons $f \leq g$ sur $]a,b[$, i.e.*

$$\forall t \in ]a,b[, f(t) \leq g(t).$$

*Si $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ convergent, alors*

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$$

*S'il y a égalité dans l'inégalité précédente, c'est que $f=g$ sur $]a,b[$.*

*Démonstration.* Appliquer la positivité et le cas de nullité à $h=g-f$, qui est à valeurs positives. □

**Proposition 11** (Inégalité triangulaire)**.** *Soit $f$, continues, à valeurs réelles ou complexes, sur $]a,b[$, $a<b$. Si $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b |f(t)|\, dt$ convergent, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

*Démonstration.* Il y a un cas d'égalité, il est hors-programme. Le cas où $f$ est à valeurs réelles est plus simple que le cas à valeurs complexes.

— Si $f$ est à valeurs réelles, alors,

$$\forall t \in ]a,b[, -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

On peut appliquer deux fois la proposition de croissance de l'intégrale pour obtenir que

$$-\int_a^b |f|(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b |f|(t)\, dt$$

ce qui est le résultat annoncé.

— Si $f$ est à valeurs complexes, il s'agit de se ramener au cas réel en gardant la possibilité de comparaisons. Soit $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-i\phi}\int_a^b f(t)\, dt \in [0,+\infty[$, *i.e.*

$$\int_a^b f(t)\, dt = e^{i\phi}\left|\int_a^b f(t)\, dt\right|$$

La fonction $g$ définie par

$$g(t) = \mathrm{Re}(e^{-i\phi}.f(t))$$

est continue sur $]a,b[$, à valeurs réelles, d'intégrale convergente et

$$\forall t \in ]a,b[, g(t) \leq |f(t)|$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\phi}.f(t))\, dt \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

En réécrivant, il vient

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\phi}.\int_a^b f(t)\, dt\right) \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

*i.e.*

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

□

## 3.2 Intégration par parties

Les techniques de calcul intégral usuel s'étendent dans le cas généralisé.

**Théorème 12: IPP**

Soit $I = ]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$. Si

1. $\int_a^b f'(t).g(t)\ dt$ est convergente,
2. $t \mapsto f(t).g(t)$ admet une limite lorsque $t \to b^-$ et $t \to a^+$

alors

1. $\int_a^b f(t).g'(t)\ dt$ est convergente et
2. 

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t).g'(t)\ dt &= \left[\lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - \lim_{t\to a^+} f(t)g(t)\right]\\ &\quad - \int_a^b f(t)'.g(t)\ dt\end{aligned}$$

On note, par extension,

$$[f(t).g(t)]_a^b = \left[\lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - \lim_{t\to a^+} f(t)g(t)\right]$$

La formule prend alors sa forme habituelle, on peut signaler cette extension en indiquant « au sens des limites » à côté du crochet.

*Démonstration.* Soit $c \in ]a,b[$ et $X \in ]a,b[$ destiné à tendre vers $b$. On a alors, par la formule d'ipp classique, comme $f,g \in \mathscr{C}^1([c,X])$,

$$\int_c^X f(t).g'(t)\ dt = [f(X)g(X) - f(c)g(c)] - \int_c^X f(t)'.g(t)\ dt$$

Lorsque $X \to b$, le membre de droite converge vers

$$\left[\lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(c)g(c)\right] - \int_c^b f(t)'.g(t)\ dt$$

ce qui montre que $\int_c^b f(t).g'(t)\ dt$ est convergente et donne sa valeur. Le même travail avec la borne $a$ donne que

$$\int_a^c f(t).g'(t)\ dt = \left[f(c)g(c) - \lim_{t\to a^+} f(t)g(t)\right] - \int_a^c f(t)'.g(t)\ dt$$

En sommant, par CHASLES, on obtient le résultat attendu. □

**Exemples**

Q :Montrer la convergence et évaluer $\int_0^{+\infty} x^3.e^{-x}\ dx$.

Q :Discuter de la convergence suivant les valeurs $\alpha > 0$ de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\ dx$, de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\ dx$

**Exercice 6.—** Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\,,\\ -x\ln x & \text{si } x>0\,.\end{cases}$$

On pose pour tout $(h,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ :

$$I_k=\int_0^1\frac{(f(x))^k}{k!}dx \quad \text{et} \quad H_{h,k}=\int_0^1 x^h(\ln x)^k dx\,.$$

**1.** Calculer $I_1$.
**2.** Montrer que $(h+1)H_{h,k}=-kH_{h,k-1}$ pour tout $k\geq 1$.
**3.** Calculer $H_{h,0}$. En déduire que $H_{h,k}=(-1)^k k!(h+1)^{-k-1}$.
**4.** En utilisant ce qui précède trouver la valeur de $I_k$.

## 3.3 Changement de variable

### Changement de variable

**Théorème 13: Changement de variable/Version officielle**

Soit $I=]a,b[$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\phi : I\to J$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ **strictement monotone** telle que

$$\lim_{t\to a^+}\phi(t)=c \text{ et } \lim_{t\to b^-}\phi(t)=d$$

Si $f$ est une fonction continue sur $J$, à valeurs réelles ou complexes, alors

1. $f\circ\phi$ est continue sur $I$, de même que $(f\circ\phi).\phi'$
2. Les intégrales généralisées $\int_c^d f(u)\,du$ et $\int_a^b f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt$ sont de même nature
3. et, en cas de convergence, leurs valeurs sont égales...

*Démonstration.* On montre en fait un énoncé où la monotonie ne fait pas partie des hypothèses et la nature identique ne fait pas partie des conclusions.

**Théorème 14** (Changement de variable/Version hors-programme)**.** *Soit $I=]a,b[$, $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\phi : I\to J$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1(I)$ telle que*

$$\lim_{t\to a^+}\phi(t)=c \textit{ et } \lim_{t\to b^-}\phi(t)=d$$

*Si $f$ est une fonction continue sur $J$, à valeurs réelles ou complexes, alors*

*1. $f\circ\phi$ est continue sur $J$, de même que $(f\circ\phi).\phi'$*
*2. Si l'intégrale généralisée $\int_c^d f(u)\,du$ est convergente alors $\int_a^b f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt$ l'est aussi*
*3. et leurs valeurs sont égales...*

Soit $\alpha\in]a,b[$, alors $\phi(\alpha)\in J$. Supposons $\int_c^d f(u)\,du$ convergente. Les intégrales généralisées $\int_{\phi(\alpha)}^d f(u)\,du$ et $\int_c^{\phi(\alpha)} f(u)\,du$ sont convergentes.

Soit $X \in ]a,b[$ destiné à tendre vers $b$. Alors, par la formule du changement de variable classique,

$$\int_{\alpha}^{X} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt \quad = \quad \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(X)} f(u)\,du$$

Lorsque $X \to b^-$, $\phi(X) \to d^-$ et, par composition,

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(X)} f(u)\,du \to \int_{\phi(\alpha)}^{d} f(u)\,du$$

et donc $\int_{\alpha}^{b} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ est convergente et vaut $\int_{\phi(\alpha)}^{d} f(u)\,du$.

Le même raisonnement donne que $\int_{a}^{\alpha} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ est convergente et vaut $\int_{c}^{\phi(\alpha)} f(u)\,du$.

L'intégrale généralisée $\int_{a}^{b} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ est convergente et vaut $\int_{c}^{d} f(u)\,du$. Voilà pour l'énoncé intermédiaire.

On passe sur la démonstration de l'énoncé complet où on gagne l'égale nature. $\square$

D'un point de vue pratique (ou physicien, comme on préfère), on dit qu'on introduit une nouvelle variable d'intégration. $u = \phi(t)$. On vérifie que lorsque $t$ décrit l'intervalle $I$ alors $u$ décrit l'intervalle $J$, ce qui assure que $f(u)$ a un sens (et dépend continûment de $u$). On constate ensuite que

1. Lorsque $t \to b$, $u \to d$,
2. lorsque $t \to a$, $u \to c$,
3. Que les éléments différentiels (quoique ça veuille dire) sont liés par $du = \phi'(t)dt$ et donc, partant de $\int_{c}^{d} f(u)\,du$, on a égalité de $\int_{a}^{b} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ avec

$$\int_{u=c}^{u=d} f(u)\,du = \int_{t=a}^{t=b} f(\underbrace{\phi(t)}_{u})\,\underbrace{\phi'(t)dt}_{du}$$

En remarque finale, pour calculer $\int_{c}^{d} g(\psi(u))\,du$, on a souvent envie de poser $t = \psi(u)$, ce qui n'est pas la direction de changement de variable proposée par le théorème. La technique (et l'hypothèse naturelle qui en découle) est de supposer que $\psi$ est une bijection de l'intervalle $J$ sur l'intervalle $I$ (sur lequel $g$ est continue) de classe $\mathscr{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas. De la sorte, sa bijection réciproque que l'on note $\phi$ vérifie les hypothèses du théorème. (Se rappeler du théorème portant sur réciproque et dérivabilité). On pose $u = \phi(t)$ et il vient

$$\int_{c}^{d} g(\psi(u))\,du = \int_{a}^{b} g(\psi(\phi(t))).\phi'(t)\,dt = \int_{a}^{b} g(t).\phi'(t)\,dt = \int_{a}^{b} g(t).\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}\,dt$$

On peut noter qu'une application $\psi$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $J$ dont la dérivée ne s'annule pas définit une bijection de $J$ sur un intervalle $I$.

**Changement de variable linéaire/affine**

Q : Sous réserve de convergence d'une des deux intégrales concernées, donner $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_{0}^{+\infty} t^5.e^{-3t}\,dt = \alpha.\int_{0}^{+\infty} u^5.e^{-u}\,du$$

Q : Sous réserve de convergence d'une des deux intégrales concernées, donner une relation entre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-\frac{1}{2}.x^2}\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.x^2}\,dx \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} y.e^{-(y-7)^2}\,dy$$

NB : un changement de variable linéaire ou affine ne nécéssite pas beaucoup de justification : pourvu que la coefficient directeur soit non nul, la fonction effectuant le changement de variable est bien mieux que $\mathscr{C}^1$, les bornes sont assez évidentes (attention en cas de bornes infinies au signe du coeffcient directeur) et l'élement différentiel se change facilement. Dans ce cas, utiliser l'expression « par le changement de variable linéaire/affine $u = a.t + b$ avec $du = a\,dt$ » on a ...

**Fonctions paires, fonctions impaires**

**Proposition 15**

Soit $a > 0$ ou $a = +\infty$, $I = ]-a, +a[$ et $f$ une fonction numérique continue sur $I$. On suppose que $\int_0^{+a} f(t)\,dt$ est *convergente*.

— Si $f$ est impaire, alors
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 0$$

— Si $f$ est paire, alors
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 2\int_0^{+a} f(t)\,dt$$

Remarques.

1. Si $\int_0^{+a} f(t)\,dt$ n'est pas convergente alors le symbole $\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt$ ne représente pas un nombre.
2. Cet énoncé est intéressant pour accélérer des calculs, notamment dans le cas où on ne sait pas calculer de primitive de l'intégrande. Il faut toutefois être en mesure de justifier de convergence d'intégrales généralisées sans les calculer. Ce thème est celui du §4.

**Changement de variable non linéaire**

Q : Sous réserve de convergence d'une des deux intégrales concernées, donner une relation entre

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.x^2}\,dx \text{ et } \int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}}.e^{-y}\,dx.$$

**Exercice 7.—** On veut calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3})dx.$$

**1.** Trouver une primitive de $\phi(x) = x^2 \sin x$ en effectuant plusieurs intégrations par parties.
**2.** Calculer $I$ en utilisant le changement de variables $u = \pi x^{1/3}$.

# 4 Critères de convergence

## 4.1 Fonctions positives

**Rappel :Un critère d'existence de limite**

**Théorème 16.** *Soit $I = [a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}, b > a$ ou "$b = +\infty$". Soit $F$, définie sur $I$,* **à valeurs réelles***, une fonction* **croissante** *alors*

1. *Soit $F$ n'est pas majorée et alors $\lim_{x\in I, x\to b} F(x) = +\infty$.*
2. *Soit $F$ est majorée et alors $\lim_{x\in I, x\to b} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\sup\{F(x), x \in I\}$.*

Dans le deuxième cas, la limite est donc un majorant de $F$ sur $I$ et c'est le plus petit des majorants de $F$ sur $I$. En clair. Posons $L = \lim_{x\in I, x\to b} F(x)$,

1. $\forall x \in I, F(x) \le L$.
2. Si $M \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in I, F(x) \le M$ alors $L \le M$.

**Intégrale généralisée d'une fonction positive**

**Théorème 17.** *Soit $I = [a,b[$ avec $b \in \mathbb{R}, b > a$ ou "$b = +\infty$" et $f$ une fonction* **positive***, continue sur $I$ alors*

1. *Soit $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée sur $I$ auquel cas l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.*
2. *Soit $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ n'est pas majorée sur $I$ auquel cas l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente (vers $+\infty$).*

**Fonctions positives : le théorème de comparaison**

**Théorème 18: TCIIP** [a]

[a]. Théorème de Comparaison pour les Intégrales à Intégrande Positive

Soit $I = ]a,b[$ et $f, g$ deux fonctions **positives**, continues sur $I$, telles que $f \le g$ sur $I$, *i.e.*

$$\forall t \in I, 0 \le f(t) \le g(t)$$

1. Si $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)\,dt$ l'est aussi.
2. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente (vers $+\infty$) alors $\int_a^b g(t)\,dt$ l'est aussi.

*Démonstration.* Supposons que $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente Soit $c \in ]a,b[$, Soit $X \in ]c,b[$, on a, par la croissance de l'intégrale, puis par positivité de $g$,

$$\int_c^X f(t)\,dt \le \int_c^X g(t)\,dt \le \underbrace{\int_c^b g(t)\,dt}_{\text{indep. de } X}$$

Comme $f \ge 0$, la fonction $X \mapsto \int_c^X f(t)\,dt$ est croissante majorée sur $]c,b[$, elle admet une limite finie lorsque $X \to b$ et donc $\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente. Le même type de travail sur l'autre borne donne que $\int_a^c f(t)\,dt$ est convergente et finalement, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

La deuxième assertion est la contraposée de la première : les intégrales généralisées se divisent en deux catégories, celles qui convergent et celles qui divergent. □

NB : En complément, *en cas de convergence uniquement*, on peut ajouter, d'après la proposition 10, l'inégalité

$$\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt$$

**Fonctions positives : Application 1**

$t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ sur $[0,+\infty[$. Cas $x \geq 1$, cas $0 < x < 1$.

**Fonctions positives : Application 2, méthode des équivalents**

$t \mapsto \frac{1+t^7}{(1+t^{15})^{\frac{1}{2}}}$ sur $]0,+\infty[$ ; $t \mapsto \frac{1+t^7}{(1+t^{17})^{\frac{1}{2}}}$ sur $]0,+\infty[$.

**Fonctions positives : Application 3, majoration asymptotique**

$t \mapsto t^k e^{-t^2}$ sur $[0,+\infty[$. $k \in \mathbb{N}$.

**Fonctions positives : Application 4**

$t \mapsto (1-t)^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{2}}$ sur $]0,1[$.

**Exercice 8.—** Intégrales de BERTRAND en 0 et à l'$\infty$.

**1.** Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in ]0,+\infty[$ de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t|\ln t|^\alpha}$$

et donner, en cas de convergence, sa valeur. Indication:Faire un changement de variables.

**2.** Idem avec l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^\alpha}.$$

**3.** En comparant $\ln(1+u)$ et $u$ lorsque $u \in [0,1]$, donner la nature de l'intégrale, suivant les valeurs de possibles de $\alpha > 0$.

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}.$$

**4.** Quelle est la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^\alpha}.$$

**5.** Discuter de la nature des intégrales généralisées

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta} \text{ et } \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}.$$

lorsque $\alpha \in ]0,+\infty[\setminus\{-1\}$ et $\beta$ réel. Indication:Comparer l'intégrande avec $t^{-\alpha'}$ où $\alpha'$ du même côté de 1 que $\alpha$.

**Exercice 9.—** Etudier la nature des intégrales suivantes (dans certains cas, penser à utiliser la méthode des équivalents) :

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}},\ B=\int_0^{+\infty}t^5\,e^{-t^2}\,dt,\ C=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$D=\int_1^{+\infty}\sin t\;e^{-2t}\,dt,\ E=\int_0^1\frac{\sin x-x}{1-\cos x}\,dx.$$

**Exercice 10.—** On suppose que vous ne connaissez pas la fonction arcsin, donner un argument garantissant la convergence de $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ mais qui ne donne pas la valeur de cette intégrale. Indication:Comparer $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle d'intégration.

**Exercice 11.—** On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,dt.$$

**1.** Montrer que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
**2.** Démontrer que $f$ est paire.
**3.** À l'aide d'un changement de variable judicieux, démontrer qu'il existe $K$ dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout réel $x$, $f(x)=K|x|$ ( on ne demande pas de calculer $K$, on peut montrer que $K=\pi/2$).

**Exercice 12.—** Intégration des fractions rationnelles.
**1.** Donner deux arguments distincts garantissant la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

Quelle est sa valeur ?
**2.** Déterminer, avec le minimum de calcul la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

où $n\in\mathbb{N}^*$. Votre argument est-il valable au cas où $n$ est un nombre réel $>0$.
**3.** On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+1}}$.
**3.a.** Vérifier que $J_n+I_{n+1}=I_n$.
**3.b.** Montrer (par une i.p.p, en écrivant $t^2=t.t$) que $J_n=\frac{1}{2.n}I_n$.
**3.c.** En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis une formule directe pour $I_n$ en fonction de $n$.

## 4.2 Intégrales absolument convergentes

**Critère d'absolue convergence**

**Théorème 19:** *ACV $\Rightarrow$ CV*

Soit $I = ]a,b[$ et $f$ une fonction continue sur $I$. Si $\int_a^b |f(t)|\ dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente.

Remarques :

1. L'intégrale d'une fonction $f$ vérifiant l'hypothèse du théorème est dite **absolument convergente**. Le théorème dit que si une intégrale est ACV, elle est CV.
2. Si l'intégrale est ACV, par la proposition 11, on a l'inégalité

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

*Démonstration.* Supposons $f$ à valeurs réelles, on se ramène à ce cas en considérant les parties réelle et imaginaire de $f$.

Considérons $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = -\min(f,0)$. On a $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$. Les fonctions $f^+$ et $f^-$ sont continues, positives sur $I$, majorées par $|f|$. Comme $\int_a^b |f(t)|\ dt$ est convergente, par le théorème de comparaison, les intégrales de $f^+$ et $f^-$ le sont aussi.

Prenons $c \in ]a,b[$. $X \in ]a,b[$ destiné à tendre vers $b$, on a

$$\int_c^X f(t)\ dt = \int_c^X f^+(t)\ dt - \int_c^X f^-(t)\ dt,$$

l'existence de limites finies lorsque $X \to b$ pour les deux termes de droite garantit l'existence de la limite finie du terme de gauche.

$$\int_c^b f(t)\ dt$$

est convergente. Le même raisonnement garantit que $\int_a^c f(t)\ dt$ l'est aussi et finalement $\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente. L'inégalité est l'inégalité triangulaire déjà démontrée. □

**Exemples**

La notion d'absolue convergence est utile dès que l'intégrande comprend une fonction oscillant indéfiniment entre valeurs négatives et valeurs positives, ou, concernant les fonctions à valeurs complexes, lorsque ces fonctions ont une phase non constante.

Q :Montrer l'absolue convergence de $\int_0^{+\infty} \sin(x^2).e^{-x}\ dx$

Q :Montrer l'absolue convergence de $\int_0^1 e^{\frac{i}{x}+x} x^{-\frac{1}{2}}\ dx$

Q :Montrer l'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^3).e^{-|x|}\ dx$. Quelle est sa valeur ?

**Exercice 13.—** Soit $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x.e^{-x}\ dx$.

Grâce à un changement de variables, calculer $I_n$ en fonction de $I_0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin x.e^{-x}\ dx$ est convergente et calculer sa valeur.

**Exercice 14.—**

**1.** Convergence de $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$, valeur ?

**2.** Convergence de $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin(t)}{1-t^2}\,dt$, valeur ?

**3.** Convergence de $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin(\pi.t)}{1-t^2}\,dt$, valeur ?

**Exercice 15.—** Fonction B d'EULER.

**1.** A quelle condition sur les nombres réels $p$ et $q$ l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}\,dx$$

converge-t-elle ? On note $\mathrm{B}(p,q)$ sa valeur. Quel est le domaine de définition de la fonction B définie par cette formule ?

**2.** Même question avec l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{p-1}(1+x)^{q-1}\,dx$$

On exprimera cette intégrale en fonction de $\mathrm{B}(p,q)$ en effectuant un simple changment de variable affine.

**3.** Par un changement de variable adéquat, établir une relation entre $\mathrm{B}(p,p)$ et les intégrales de WALLIS pour certaines valeurs de $p$.

**Exercice 16.—** Autour des densités $\gamma$ et de la fonction $\Gamma$ d'EULER.

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Discuter de la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

En cas de convergence, on note sa valeur [1] $\Gamma(x)$. Quel est le domaine de définition de la fonction $\Gamma$ définie par cette expression ?

**2.** On suppose $x \in ]0,+\infty[$, $\lambda > 0$. Discuter de la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda.t}\frac{dt}{t}$$

et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$.

**3.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Indication:Faire, sur les intégrales partielles, une intégration par partie et passer à la limite dans les bornes ensuite !

**4.** Quelle est la valeur de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ ?

**5.** En admettant que la fonction $\Gamma$ est croissante sur $[2,+\infty[$, donner sa limite en $+\infty$.

**6.** On admet que la fonction $\Gamma$ ainsi définie est continue [2] sur $]0,+\infty[$. Donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

**7.** On admet que les dérivées de la fonction $\Gamma$ sur $]0,+\infty[$ s'obtiennent en dérivant formellement sous le signe intégrale. Quelles sont les intégrales obtenues ? Vérifier qu'elles sont convergentes.

1. Il s'agit de la fonction $\Gamma$ d'EULER
2. elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, note culturelle

## 4.3 Se ramener à de l'absolue convergence : Hors Programme

**Stratégie d'IPP**

Voici un exemple un peu plus élaboré, grand classique.

Q : Etudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

R :Il y a *a priori* deux problèmes potentiels qui font que l'on doit considérer cette intégrale au sens généralisé : l'un en 0, l'autre à l'infini.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est définie sur $]0,+\infty[$. En 0, elle se prolonge par continuité en y prenant la valeur 1. L'intégrale du côté de 0 est donc une intégrale "faussement impropre". Il nous reste à étudier la convergence (ou pas) de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Du point de vue de l'absolue convergence, la meilleure majoration "facile", en valeur absolue, de l'intégrande est par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$. Majorer par une fonction dont l'intégrale diverge vers $+\infty$ est inutile ! Il faut donc s'y prendre autrement. L'idée est qu'une "intégration par parties" va nous faire apparaître un terme ACV (meilleur donc, de notre point de vue), cependant que l'autre terme, lui ne va pas "empirer".

*Démonstration.* L'intégrale considérée est convergente.

Soit $X > 1$. On a, après intégration par parties $u(t) = \frac{1}{t}, v'(t) = \sin t$

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt \quad = \quad \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

Lorsque $X$ tend vers $+\infty$, le terme "tout intégré" tend vers une constante. Le terme "intégral" est, lui, la somme partielle d'une intégrale ACV (détailler). Il admet donc une limite lorsque $X \to +\infty$. Le membre de gauche admet donc une limite lorsque $X \to +\infty$ et l'intégrale considérée est convergente.

L'intégrale considérée n'est pas absolument convergente. En effet,

Soit $X > 1$. On remarque que $|\sin t| \geq \sin^2 t \geq \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$. On a donc

$$\int_1^X \frac{|\sin t|}{t}\, dt \quad \geq \quad \frac{1}{2}\ln X - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{\cos 2t}{t}\, dt$$

Lorsque $X$ tend vers $+\infty$, Le terme "intégral" est, lui, la somme partielle d'une intégrale CV (cousine de la précédente). Il admet donc une limite finie lorsque $X \to \infty$. le terme en $\ln X$ quand à lui diverge vers $+\infty$.

On vient donc de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$ est divergente (vers $+\infty$).

□

Utiliser le script `python/sinxoverx-inf.py` pour produire la figure 4.

Utiliser le script `python/abssinxoverx-inf.py` pour produire la figure 5.

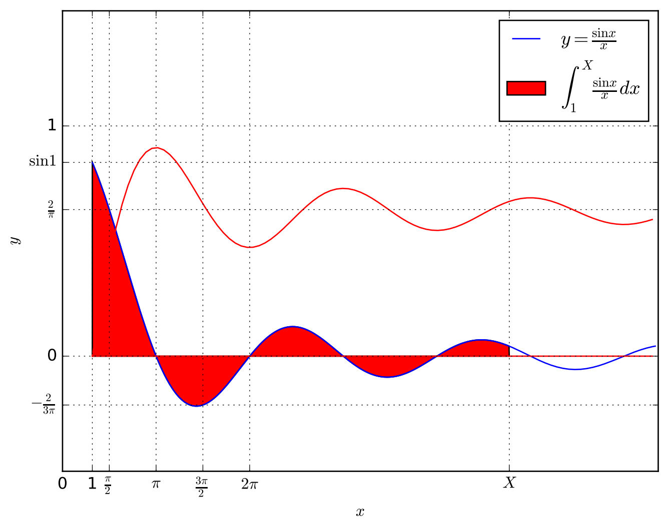



FIGURE 4 – Le graphe de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, convergence de l'intégrale généralisée.

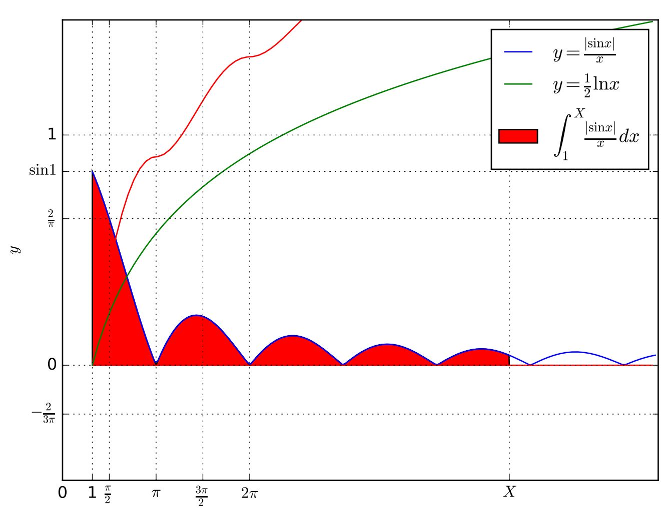



FIGURE 5 – Le graphe de $x \mapsto \left|\frac{\sin x}{x}\right|$, non convergence absolue.