Notes de cours 04

Variables aléatoires réelles à densité

Table des matières

1 Introduction

1.1 Conventions d'écriture

Intégrales généralisées : Un nombre fini de discontinuités

— Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b ($a \leq b$, a et b pouvant être les symboles $\pm\infty$), et f est une fonction continue sur $]a,b[$, on convient de noter, si l'intégrale généralisée à droite du symbole « = » est (absolument) convergente.

$$\int_I f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt$$

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction ne présentant qu'un nombre fini de discontinuités, i.e il existe un nombre fini d'intervalles I_1, I_2,..I_N, contigus et dont l'union recouvre $\mathbb{R}$ telle que f soit continue sur l'intérieur de chaque intervalle I_n.
On convient de noter $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt$ la somme des intégrales généralisées $\int_{I_n} f(t)\ dt$ pourvu que *chacune* de celles-ci soit (absolument) convergente.

fonctions positives et valeur ∞

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intérieur de I, *positive*, nous avons vu que

1. soit $\int_I f(t)\ dt$ converge ;
2. soit $\int_I f(t)\ dt$ diverge [1] vers $+\infty$.

Si f est définie sur $\mathbb{R}$, *positive*, continue sauf en un nombre fini de points, avec les notations précédentes, on convient de noter, en théorie des probabilités,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt = \infty$$

si l'une (au moins) des intégrales généralisées $\int_{I_n} f(t)\ dt$ diverge vers $+\infty$.

Fonctions indicatrices

On rappelle que la fonction indicatrice d'une proposition logique P ou d'un ensemble $A \subset E$ est définie par

$$1\!\!1_{\{P\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ est vraie} \\ 0 & \text{si } P \text{ est fausse} \end{cases} \text{ ou } \forall x \in E,\ 1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On a

$$\forall x \in E,\ 1\!\!1_A(x) = 1\!\!1_{\{x \in A\}}$$

Nous nous servons de ces fonctions indicatrices pour définir efficacement des fonctions par morceaux. Par exemple, nous définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} 1\!\!1_{\{x \in]0,1[\}}$$

en considérant que f est la fonction définie par l'alternative

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2 Lois de v.a.r.

Mélange de populations

Dans le dernier exemple du chapitre sur les bases des probabilités, on a construit, à partir de deux v.a. indépendantes T (prenant l'une des trois valeurs symboliques n, a et t) et U (uniformément distribuée sur $]0,1[$), de trois fonctions G_n, $G_a\, G_v :]0,1[\to \mathbb{R}$, la v.a. V telle que

$$V = \begin{cases} G_n(U) & \text{sur } \{T = n\} \\ G_a(U) & \text{sur } \{T = a\} \\ G_v(U) & \text{sur } \{T = v\} \end{cases}$$

1. Lorsque l'on traite de probabilités, on note ce fait

$$\int_I f(t)\ dt = \infty$$

Nous avons démontré une formule de transfert pour V du type

$$\mathbb{E}(h(V)) = \int_{\mathbb{R}} h(v).\delta_V(v)\, dv$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction QUELCONQUE telle que $\mathbb{E}(h(V))$ existe (par exemple bornée) et la fonction $\delta_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante par morceaux.

Donner une telle formule de transfert générique pour une v.a.r V revient à spécifier sa loi.

En effet, la loi de V est donnée par la famille de nombres $\{\mathbb{P}(V \in I), I \text{ intervalle de } \mathbb{R}\}$. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a, en prenant $h = 1\!\!1_I$, *i.e.* $\forall v \in \mathbb{R}, h(v) = 1\!\!1_{\{v\in I\}}$, que $h(V) = 1\!\!1_{\{V\in I\}}$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \in I) &= \mathbb{E}(1\!\!1_{\{V\in I\}}) = \mathbb{E}(h(V)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{v\in I\}} \delta_V(v)\, dv = \int_I \delta_V(v)\, dv \end{aligned}$$

On obtient aussi la fonction de répartition de V par la formule, pour $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \mathbb{P}(V \le v) = \mathbb{P}(V \in]-\infty, v]) \\ &= \int_{-\infty}^{v} \delta_V(s)\, ds \end{aligned}$$

Exercice 1.— Soient $p, q, r \in [0,1]$ tels que $p+q+r = 1$ et δ_V définie par

$$\forall v \in \mathbb{R},\ \delta_V(v) = \begin{cases} \frac{p}{100} + \frac{q}{75} + \frac{r}{50} & \text{si } 0 \le v \le 50 \\ \frac{p}{100} + \frac{q}{75} & \text{si } 50 < v \le 75 \\ \frac{p}{100} & \text{si } 75 < v \le 100 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

V une v.a. comme dans le texte.
1. Dessiner l'allure du graphe de δ_V. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \delta(v)\, dv$.
2. Calculer graphiquement $\mathbb{P}(V \in [25, 80])$.
3. Donner le graphe la fonction de répartition F_V de V, une formule ?

Loi d'une fonction d'une v.a. uniforme I

Soit $U \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$ et $V = U^2$. On cherche à obtenir une formule de transfert générique pour la v.a. V, *i.e.* une formule permettant de calculer $\mathbb{E}(h(V))$ pour une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (presque) QUELCONQUE.

Méthode de la fonction de répartition.

U est à valeurs dans $[0,1]$, $V = U^2$ aussi. On a donc

1. Si $v < 0$, $F_V(v) = \mathbb{P}(V \le v) = 0$,
2. Si $v > 1$, $F_V(v) = \mathbb{P}(V \le v) = 1$.
3. On traite maintenant le cas non trivial où $0 \le v \le 1$.

Pour $v \in [0,1]$, on a

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \le v) = \mathbb{P}(U^2 \le v) = \mathbb{P}(U \le \sqrt{v})) = \sqrt{v}$$

Pour un intervalle $I =]a,b]$ quelconque, on a alors (on résume rapidement, il y a des cas à distinguer sur a et b, δ_V est presque la dérivée de F_V),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V \in I) &= \mathbb{P}(V \leq b) - \mathbb{P}(V \leq a) = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{v}} 1\!\!1_{\{1>v>0\}}\, dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{v \in I\}} \delta_V(v)\, dv\end{aligned}$$

avec

$$\delta_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} 1\!\!1_{\{1>v>0\}}$$

On a donc

$$\mathbb{E}(1\!\!1_{\{V\in I\}}) = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{v\in I\}} \delta_V(v)\, dv$$

et, on admet alors que pour toute fonction h telle que $\mathbb{E}(h(V))$ existe, on a

$$\mathbb{E}(h(V)) = \int_{\mathbb{R}} h(v).\delta_V(v)\, dv$$

La dernière intégrale étant absolument convergente.

Méthode du changement de variable.

Soit h une fonction telle que $\mathbb{E}(h(V))$ existe, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(V)) &= \mathbb{E}(h(U^2)) \\ &= \int_0^1 h(u^2)\, du \\ &\quad \text{(chgt de var } v = u^2,\ u = \sqrt{v},\ du = \frac{1}{2\sqrt{v}} dv) \\ &= \int_0^1 h(v) \frac{1}{2\sqrt{v}}\, dv = \int_{\mathbb{R}} h(v) \frac{1}{2\sqrt{v}} 1\!\!1_{\{0<v<1\}}\, dv\end{aligned}$$

La dernière intégrale étant absolument convergente. On obtient donc le même résultat que par l'autre méthode. On peut calculer, par intégration, la fonction de répartition de V, en utilisant cette formule. Pour $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F_V(v) &= \int_{-\infty}^v \delta_V(s)\, ds = \int_{-\infty}^v \frac{1}{2\sqrt{s}} 1\!\!1_{\{0<s<1\}}\, ds \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ \int_0^v \frac{1}{2\sqrt{s}}\, ds & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{s}}\, ds & \text{si } v \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ \sqrt{v} & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ 1 & \text{si } v \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Loi d'une fonction d'une v.a. uniforme II (HP, technique)

Soit $U \sim \mathscr{U}_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ et $V = \sin(2.U)$. On cherche à obtenir une formule de transfert générique pour la v.a. V. On met en action la méthode la formule de transfert générique avec changement de variable.

La v.a. V est à valeurs dans $[0,1]$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction telle que $\mathbb{E}(h(V))$ existe. On a alors

$$\mathbb{E}(h(V)) = \mathbb{E}(h(\sin(2U)) \overset{\text{trans. pour } U}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h(\sin(2u)))\, du$$

On veut effectuer le changement de variable $v=\sin(2u)=s(u)$, le problème technique est que la fonction s n'est pas injective sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc le changement de variable est potentiellement problématique. Pour régler ce problème, on découpe l'intégrale par CHASLES de façon à obtenir de l'injectivité sur chacun des intervalles concernés

$$\mathbb{E}(h(V)) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\sin(2u))\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(\sin(2u))\,du$$

Pour le premier intervalle, la fonction s est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, strictement croissante, réalisant une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$. On a, posant $v=\sin(2u)$, $u\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $v\in]0,1[$,

$$dv = 2\cos(2u)\,du \overset{\cos(2u)\geq 0}{=} 2\sqrt{1-\sin^2(2u)}\,du = 2\sqrt{1-v^2}\,du$$

et

$$du = \frac{1}{2\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

Par le théorème du changement de variable pour les intégrales généralisées,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\sin(2u))\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^1 h(v)\frac{1}{2\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

L'autre intégrale se traite de la même manière, (attention, le changement de variable est décroissant, il y a des embrouilles de signe) et on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(\sin(2u))\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^1 h(v)\frac{1}{2\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

et finalement

$$\mathbb{E}(h(V)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(v)\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \int_{\mathbb{R}} h(v)\,\underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.\mathbb{1}_{\{v\in]0,1[\}}}_{\delta_V(v)}\,dv$$

La présence dans l'expression de $\delta_V(v)$ de $\mathbb{1}_{\{v\in]0,1[\}}$ marque le fait que V est p.s. à valeurs dans $]0,1[$.

2 Variables à densité

2.1 Densité

Définition 1

Une fonction $\delta_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ ayant intégrale généralisée valant 1 est appelée une *densité de probabilité* sur $\mathbb{R}$.

Définition 2

Une variable aléatoire réelle sera dite *à densité* s'il existe une densité de probabilité δ_X telle que pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(h(X))$ existe, *i.e.* sous réserve de convergence absolue de l'intégrale,

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x).\delta_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(x).\delta_X(x)\, dx$$

C'est *la formule de transfert pour les variables à densité*.

On dira aussi de façon synonyme que X a pour densité δ_X ou que X a pour loi $\delta_X(x)\, dx$, ce qu'on notera [2]

$$X \sim \delta_X(x)\, dx$$

La tradition est d'utiliser, autant que possible, des lettres majuscules pour les variables aléatoires et la lettre minuscule correspondante pour exprimer la variable d'intégration.

Remarques : Si I est un intervalle $[a,b]$, $a \leq b$, si $f = 1\!\!1_{\{.\in I\}}$, alors la formule de transfert donne

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{E}(1\!\!1_{\{X\in I\}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\!\!1_{\{x\in I\}}.\delta_X(x)\, dx = \int_a^b \delta_X(x)\, dx$$

En d'autres termes, se donner une densité de probabilité est un moyen de spécifier une distribution de variable aléatoire. La condition $\int_{\mathbb{R}} \delta_X(x)\, dx = 1$ est nécessaire car

$$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \delta_X(x)\, dx$$

La présence de l'indicatrice d'un intervalle I en facteur de la densité marque le fait que la v.a. est p.s. à valeurs dans I. En effet, si I_- et I_+ sont les intervalles à gauche et à droite de I, on a

$$\mathbb{P}(X \notin I) = \mathbb{P}(X \in I_-) + \mathbb{P}(X \in I_+) = \int_{I_-} \delta_X(x)\, dx + \int_{I_+} \delta_X(x)\, dx = 0$$

Remarquons que si X est à densité, on obtient que $\mathbb{P}(X \in [a,a]) = \mathbb{P}(X = a) = 0$. Une variable à densité ne prend *a priori* aucune valeur « exactement » avec probabilité > 0, *a contrario* des v.a prenant un nombre fini de valeurs. Les v.a. à densité forment une classe particulière de v.a.. Il est particulièrement *faux* de penser que toute v.a doit soit être à densité, soit être discrète.

2. Ceci se lit X est à densité et une densité en est la fonction $x \mapsto \delta_X(x)$. Noter que le dx n'apparait plus dans cette dernière notation. Le symbole dx sert, en autres, à marquer le nom de la variable d'intégration dans la formule de transfert.

Exemple : Loi uniforme sur un intervalle

Définition 3

1. On dit que U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ si
$$U \sim 1\!\!1_{\{u\in[0,1]\}}\, du$$
2. On dit que U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ ($a<b$) si
$$U \sim \frac{1}{b-a} 1\!\!1_{\{u\in[a,b]\}}\, du$$

L'espérance d'une fonction h de U s'écrit via la formule de transfert, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale

$$\mathbb{E}(h(U)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(u)\, du = \frac{1}{b-a}\int_{\mathbb{R}} h(u) 1\!\!1_{\{a\le u\le b\}}\, du$$

Si $U \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$ alors, $a\in\mathbb{R}$ et $\delta = b-a$ fixés alors, en posant $V = a+\delta.U = (1-U).a+U.b$, $V \sim \mathscr{U}_{\underbrace{[a,a+\delta]}_{[a,b]}}$.

Utiliser le script `python/graphe-densite-uniforme.py`. *cf.* Fig. 1

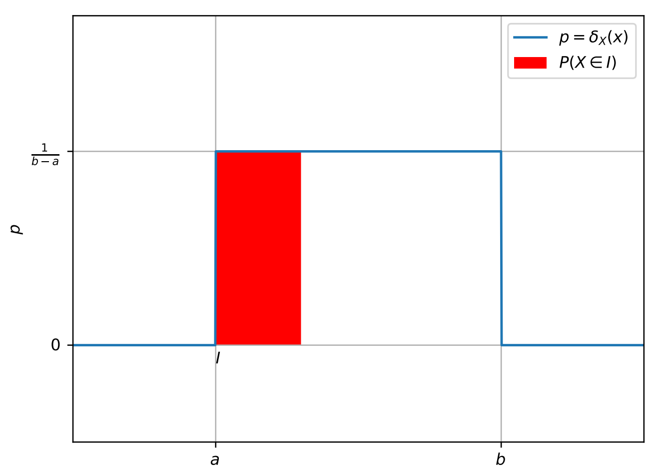

FIGURE 1 – Graphe de la densité uniforme $\mathscr{U}_{[a,b]}$.

Exemples d'exercices

Exercice 2.— Soit $U \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$. Exhiber une densité de $Z = -\ln U$.

Exercice 3.— Soit $U \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$. Donner une formule de transfert générique pour $W = \max(U, \frac{1}{2})$.

Indication:Ecrire la décomposition $h(W) = h(W) 1\!\!1_{\{U\le\frac{1}{2}\}} + h(W) 1\!\!1_{\{U>\frac{1}{2}\}} = h(\frac{1}{2}) 1\!\!1_{\{U\le\frac{1}{2}\}} + h(U) 1\!\!1_{\{U>\frac{1}{2}\}}$

Exercice 4.— Soit c une constante réelle et f la fonction de variable réelle définie par

$$f = c.\left(\frac{1}{2}1\!\!1_{[0,\frac{1}{3}[} + 1\!\!1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]} + 2.1\!\!1_{]\frac{2}{3},1]}\right)$$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X ayant pour densité f.
3. Le nombre X tiré au hasard a-t-il plus de chances d'être $> \frac{2}{3}$ ou d'être $\leq \frac{2}{3}$?

Exemple : Loi normale/Loi de GAUSS

Théorème 4 (Valeur de l'intégrale Gaussienne)**.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Exercice 5.— Que vaut $\Gamma(\frac{1}{2})$ où Γ est la fonction d'EULER définie dans un document précédent ?

Définition 5

1. On dit que X suit la loi normale ou Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, si

$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

2. Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in]0,+\infty[$. On dit que X suit la loi normale ou Gaussienne, de moyenne m, de variance σ^2, $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$, si

$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

L'espérance d'une fonction h de X s'écrit via la formule de transfert, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale

$$\mathbb{E}(h(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.\int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Si $X \sim \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ alors la centrée réduite de X

$$X^* = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Réciproquement, si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ alors

$$X = m + \sigma.Y \sim \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$$

Utiliser le script `python/graphe-densite-normale.py`. *cf.* Fig. 2

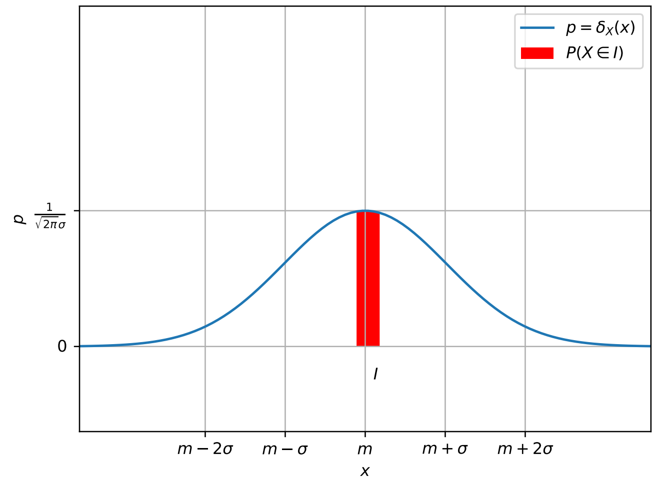

FIGURE 2 – Graphe de la densité $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$.

Exemple : Loi exponentielle

Définition 6

1. On dit que X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$, si

$$X \sim e^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}\, dx$$

2. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. On dit que X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, de paramètre λ si

$$X \sim \lambda . e^{-\lambda . x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}\, dx$$

L'espérance d'une fonction réelle h de X s'écrit via la formule de transfert, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale

$$\mathbb{E}(h(X)) = \lambda . \int_0^{+\infty} h(x) e^{-\lambda . x}\, dx = \lambda . \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-\lambda . x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}\, dx$$

Si $X \sim \mathscr{E}(1)$ alors

$$Y = \frac{1}{\lambda} . X \sim \mathscr{E}(\lambda)$$

réciproquement, si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ alors

$$Y = \lambda . X \sim \mathscr{E}(1)$$

Utiliser le script `python/graphe-densite-exponentielle.py`. *cf.* Fig. 3

Exercice 6.—

1. Soit X une v.a. réelle de loi normale centrée $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$. Quelle est la loi de $-X$?

2. Soit X une v.a. réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la fonction de répartition de $-X$? Sa loi ?

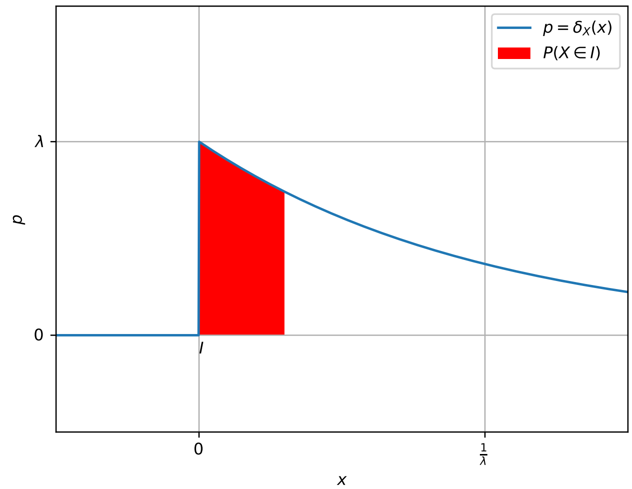

FIGURE 3 – Graphe de la densité $\mathscr{E}(\lambda)$.

Exercice 7.— Soit X un v.a.r et $Y = X^2$. Donner une densité (formule et graphe) de Y et son espérance avec le minimum de calculs dans les cas

1. $X \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$
2. $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$
3. $X \sim \mathscr{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

Exercice 8.— Densité de la loi log-normale, moments.

Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in]0, +\infty[$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi *log-normale* de paramètres m, σ^2 si elle a même loi que e^Y où $Y \sim \mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
1. Dans quel ensemble X prend-elle ses valeurs ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ en fonction de m et σ^2. Quelle est la variance de X ? Généraliser ces calculs en donnant une formule générale pour $\mathbb{E}(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer une densité de X.

⋆⋆⋆

Les trois lois de probabilités à densité du programme sont maintenant présentées. Vous devez en connaitre naturellement définition, espérance, variance, fonction de répartition [3].

3. L'exercice suivant doit pouvoir être refait en moins de 1mn :

Exercice 9.— Donner des expressions compactes de la *fonction de répartition* F_X de X lorsque
1. X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$,
2. X suit la loi, $\mathscr{E}(\lambda)$, loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$,

Noter que pour la loi normale, la fonction de répartition Φ est définie par $\forall x \in]0, +\infty[, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$. C'est une nouvelle fonction élémentaire que nous ne connaissons que via son graphe, des tables de valeurs ou encore une fonction prédéfinie dans un logiciel ou un système de calcul. En `Python/numpy`, il s'agit de, après importation `from scipy.stats import norm` de `norm.cdf`, voir aussi la fonction d'erreur `scipy.special.erf`.

Après tout ce n'est guère différent en principe de la fonction logarithme que vous avez découverte en Terminale et dont une définition classique est : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Il faut comprendre que ces lois classiques ont d'abord un sens physique et que leur formule n'est que la conséquence de ce sens physique. Pour les lois uniformes, il s'agit de tirer au sort dans un intervalle borné sans que soit privilégiée une zone de cet intervalle. Pour la loi normale, nous verrons, entre autres, qu'elle est interprétable comme une variante limite de lois binomiales. L'intérêt de la loi exponentielle réside dans l'exercice 10.

L'absence de mémoire, v.a. exponentielles

Exercice 10.— Variable sans mémoire, désintégration atomique.

On suppose que T est une variable aléatoire réelle *positive* représentant l'instant où un certain événement surgit. On peut par exemple penser, lorsque l'on dispose d'un atome sujet à désintégration à l'instant où celui-ci se désintégrera.

On suppose que T est « sans mémoire », ce qui signifie que,

1. $\mathbb{P}(T > 0) = 1$.
2. Pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(T > t) > 0$
3. la probabilité que l'événement surgisse (strictement) après l'instant $t+s$ sachant qu'il surgira après l'instant t $(t,s \geq 0)$ est indépendante de t.

Ceci s'interprète par le fait que l'atome « ne vieillit pas », *i.e.* la loi de sa durée de vie restante sachant qu'il est resté en l'état jusqu'à l'instant t ne dépend pas de t.

1.a. Montrer que T est sans mémoire si et seulement si

1. $\mathbb{P}(T > 0) = 1$.
2. Pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(T > t) > 0$
3. Pour tout $t,s \geq 0$, $\mathbb{P}(T > t+s) = \mathbb{P}(T > t).\mathbb{P}(T > s)$

1.b. Montrer qu'une v.a. réelle exponentielle est sans mémoire.

2. On va montrer, sous des hypothèses restrictives [4], que si T est sans mémoire, alors T suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ pour un certain paramètre λ.

Soit F la fonction de répartition de T.

2.a. Montrer que $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

2.b. On pose, pour $t \geq 0$, $g(t) = \ln \mathbb{P}(T > t)$. Montrer que pour tous $s,t \geq 0$,

$$g(t+s) = g(t) + g(s)$$

2.c. On suppose que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que g' est constante sur $\mathbb{R}^+$. Quel est le signe de cette constante ? quelle est la valeur de $g(0)$?

2.d. En déduire la fonction de répartition, puis la loi de T.

3. Désintégration atomique. On suppose que l'on a, à l'instant zéro du processus une population de $\mathscr{N}$ atomes de type A pouvant se désintégrer en atomes de type B. On note T_n l'instant de désintégration de l'atome n, pour $n \in \{1, \ldots, \mathscr{N}\}$. On suppose, et c'est le résultat de la partie précédente, que, pour un certain $\lambda > 0$,

1. chaque T_n suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$,
2. Les T_n sont indépendants dans leur ensemble.

4. Une analyse plus serrée et technique permet de lever ces hypothèses, ce qui explique l'importance de la loi exponentielle comme étant l'unique type de loi possible des v.a. sans mémoire.

A un instant $t > 0$, on note $N(t)$ la proportion d'atomes encore de type A, le reste, $1 - N(t)$ s'étant transformé en atomes de type B.

3.a. Exprimer $N(t)$ à l'aide de fonctions indicatrices d'événements ayant trait aux variables T_n.

3.b. Quelle est l'espérance de $N(t)$? A quel instant t la population a-t-elle diminué de moitié, en moyenne ?

3.c. Quelle est la variance de $N(t)$? Quelle est la limite de cette variance lorsque $\mathcal{N} \to +\infty$? Avez vous une interprétation physique raisonnable de ce fait ?

2.2 Espérance, variance

Proposition 7. *Soit $X \sim \delta_X(x)\,dx$ une v.a.r de densité δ_X.*

1. *X est intégrable (ou admet une espérance) si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |x|.\delta_X(x)\,dx$ est convergente*
2. *Dans ce cas, son espérance est*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x.\delta_X(x)\,dx$$

Proposition 8. *Soit $X \sim \delta_X(x)\,dx$ une v.a.r de densité δ_X.*

1. *X est de carré intégrable (ou admet une variance) si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |x|^2.\delta_X(x)\,dx$ est convergente*
2. *Dans ce cas, elle admet une espérance (i.e. est intégrable) et sa variance est*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^2.\delta_X(x)\,dx \\ &\overset{KH}{=} \int_{\mathbb{R}} x^2.\delta_X(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x.\delta_X(x)\,dx\right)^2 \end{aligned}$$

En exercice, savoir retrouver espérance et variance des trois familles de lois précédemment décrites.

1. Si $X \sim \mathscr{U}_{[a,b]}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
2. Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
3. Si $X \sim \mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$, $\mathbb{E}(X) = m$, $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

On commencera par traiter les cas normalisés $\mathscr{U}_{[0,1]}$, $\mathscr{E}(\lambda)$ et $\mathscr{N}(0,1)$ et raisonner par transformations affines.

Dans chacun des cas, quelles sont les centrées réduites ? Tracer l'allure des densités.

Exercice 11.— Transformée de LAPLACE.

Si X est une variable aléatoire réelle. Sa transformée de LAPLACE est la fonction $\mathscr{L}_X$ définie par la formule

$$\mathscr{L}_X(\lambda) := \mathbb{E}(e^{-\lambda.X}), \lambda \in \mathbb{R}$$

On se posera la question du domaine de définition de $\mathscr{L}_X$ par la suite.

1. On suppose que X est une v.a prenant un nombre fini de valeurs entières positives.

1.a. Montrer que $\mathscr{L}_X$ est définie sur $\mathbb{R}$ et établir le lien entre $\mathscr{L}_X$ et P_X, la fonction génératrice de X définie par $\forall t \in \mathbb{R}, P_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

1.b. Montrer que dans ce cas, on a $\mathscr{L}'_X(0) = -\mathbb{E}(X)$, $\mathscr{L}''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$ et que plus généralement, on a la formule liant moments et dérivées de $\mathscr{L}_X$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X^p) = (-1)^p \mathscr{L}_X^{(p)}(0) \tag{MD}$$

2. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1. Donner le domaine de définition et une expression fermée de la transformée de LAPLACE $\mathscr{L}_X$. Montrer que la relation (MD) est encore valable.
3. On suppose que X suit une loi normale centrale réduite. Donner une formule fermée pour sa transformée de LAPLACE. Montrer que la relation (MD) pour $p = 1$ et $p = 2$ est encore valable.
4. On suppose que X est une variable aléatoire réelle pour laquelle la relation (MD) est valable. Soient a, b deux réels et $Y = a.X + b$.
4.a. Donner le lien entre $\mathscr{L}_Y$ et $\mathscr{L}_X$. Montrer que la relation (MD) est valable pour Y. (On pourra se limiter au cas $b = 0$, les calculs pour le cas $b \neq 0$ étant un peu pénibles.
5. On suppose que X suit une loi à densité $f_X(x)\ dx$.
5.a. Ecrire la formule définissant $\mathscr{L}_X$ obtenue en appliquant la formule de transfert.
5.b. On suppose que la transformée de LAPLACE $\mathscr{L}_X$ est définie au voisinage de 0, y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que l'on calcule ses dérivées au voisinage de 0 en dérivant formellement l'intégrale de la question précédente. Expliquer en quoi la formule (MD) est raisonnable.
6. On se donne une variable aléatoire X ayant pour densité de probabilité la densité dite de CAUCHY

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

6.a. La variable X admet-elle une espérance ?
6.b. Montrer que sa transformée de LAPLACE n'est pas définie pour $\lambda \neq 0$.

2.3 Fonction de répartition, Simulation, Fonction des quantiles

Fonction de répartition des lois à densité

Théorème 9. *Soit X une v.a.$\mathbb{R}$ à densité $\delta_X(x)\ dx$ et sa fonction de répartition F_X définie par*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \delta_X(t)\ dt.$$

1. *F_X est croissante,* **continue** *sur $\mathbb{R}$*
2. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
3. *Si $I_1, \ldots, I_N$ sont des intervalles ouverts contigus, recouvrant quasiment $\mathbb{R}$, si δ_X est $\mathscr{C}^0$ sur chaque I_n, F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque I_n et*

$$\forall n, \forall x \in I_n, F_X'(x) = \delta_X(x)$$

Réciproquement,

Théorème 10: Existence de v.a. à densité

Si F est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois points précédents, *i.e.*

1. F est croissante, **continue** sur $\mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
3. Il existe $I_1, \ldots, I_N$ des intervalles ouverts contigus, recouvrant quasiment $\mathbb{R}$ tels que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque I_n.

alors, si $U \sim \mathscr{U}_{]0,1[}$, il existe X une v.a.r, fonction de U, telle que $F_X = F$, X est à densité et

$$X \sim F'(x)\ dx$$

Remarque : La fonction F' n'est pas définie en un nombre fini de points, ce n'est pas important pour une densité de probabilité.

Proposition 11: Obtention de la densité à partir de la f.r.

Soit X une v.a réelle et F_X sa fonction de répartition. Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et s'il existe $I_1, \dots, I_N$ des intervalles ouverts contigus, recouvrant quasiment $\mathbb{R}$ tels que F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur chaque I_n alors X est à densité et une densité δ_X est donné par la formule

$$\delta_X(x) = \begin{cases} F_X'(x) & \text{si } x \in \cup_{n=1}^N I_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. (du théorème 10). Limitons nous au cas où F est strictement croissante. F définit alors une bijection, strictement croissante, continue $\mathbb{R} \to]0,1[$. Soit U une variable uniforme sur $]0,1[$ et posons $X = F^{-1}(U)$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x)$$

On a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, (à détailler)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt$$

et, pour tout intervalle $I =]a,b]$,

$$\mathbb{P}(X \in I) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt$$

□

On a vu en exercice que :

1. Si U est uniformément distribuée sur $[a,b]$, sa fonction de répartition est définie, pour $u \in \mathbb{R}$, par

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 1 & \text{si } u \geq b \end{cases}$$

2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre 1, sa fonction de répartition est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 12.— D'après un oral AV-2008.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n.\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer c_n pour que f_n soit une densité de probabilité.
2. Soit X_n une variable aléatoire ayant pour densité f_n. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_n^k) = \frac{n^k}{\binom{n+k+1}{k}}$$

3. Trouver F_n la fonction de répartition de X_n.
4. Déterminer $F(x)$, la limite, si elle existe, de $F_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$ et $x \in \mathbb{R}$ est fixé.
5. Montrer que F ainsi définie est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

Simulation

La démonstration du théorème 10 peut servir pratiquement à simuler une v.a X à densité connaissant la fonction de répartition F de cette loi.

1. On tire au sort un nombre u uniformément entre 0 et 1 à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires uniformément répartis entre 0 et 1,
2. on calcule $x = F^{-1}(u)$.

Dans le cas d'une loi exponentielle de paramètre 1, on a

$$\forall u \in]0,1[, F_X^{-1}(u) = -\ln(1-u)$$

Ceci mène au script suivant

Listing 1 – python/simul-exp-1.py

```
import numpy as np

def Fmoins1(u):
    #on place la fonction réciproque
    #de la fonction de répartition dans une fonction
    return -np.log(1-u)

def VAExp():
    """
    Retourne un réel aléatoire tiré suivant une Exp(1)
    """
    return Fmoins1(np.random.rand())
```

Exercice 13.—Montrer que la fonction suivante est une fonction de répartition d'une variable X à densité, et déterminer une densité δ_X. Dessiner les graphes de F_X et δ_X. Calculer l'espérance de X si elle existe.

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } x \in [-1,0] \\ \frac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } x \in]0,+1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 14.—Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{1+x^2}$$

1. Détermier a pour que f soit une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, déterminer sa fonction de répatition F_X. En déduire une simulation informatique de X.
3. Etudier l'espérance de X et donner sa valeur si elle existe.

Exercice 15.—Soit c une constante > 0 et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner une valeur de c pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la fonction de répartition d'une telle variable X et donner un code Python permettant de simuler une telle variable à partir d'une variable uniforme sur $[0,1]$.
3. Soit X une v.a de densité f.
3.a. La v.a. X admet-elle une espérance ? si oui, la calculer.
3.b. La v.a. X admet-elle une variance ? si oui, la calculer.

Exercice 16.—Déterminer si la fonction f suivante est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Si c'est le cas, calculer la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X ayant f pour densité et déterminer $\mathbb{E}(X)$ si celle-ci existe. Préciser un intervalle de valeurs prises par X avec probabilité 1.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x).\mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(x) \end{cases}$$

Donner le code d'une fonction informatique `X()` retournant une valeur tirée au sort suivant la loi de $X \sim f(x)\,dx$

Fonction des quantiles

Pour simuler une v.a.r X de fonction de répartition F_X, on a utilisé la *fonction des quantiles* de X. Cette fonction[5], notée parfois Q_X, définie de $]0,1[\to\mathbb{R}$, est, dans le cas où la fonction de répartition F_X de X est une bijection de $I\subset\mathbb{R}\to]0,1[$, l'application réciproque de F_X. Dans tous les cas, on a

— $Q_X :]0,1[\to\mathbb{R}$ est croissante,

— Pour $u\in]0,1[$, si Q_X est continue en u, strictement croissante au voisinage de u, $F_X(Q_X(u))=u$

— Pour $x\in\mathbb{R}$, si F_X est continue en x, strictement croissante au voisinage de x, $Q_X(F_X(x))=x$

—
$$\forall\tau\in\mathbb{R},\forall u\in]0,1[\,,\ \tau=Q_X(u)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall t\geq\tau,\ F_X(t)\geq u\\ \forall t<\tau,\ F_X(t)<u\end{cases}$$

ce qui se traduit par l'égalité d'événements, pour $U\sim\mathscr{U}_{]0,1[}$,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \{Q_X(U)\leq x\}=\{U\leq F_X(x)\}$$

— Si $U\sim\mathscr{U}_{]0,1[}$, la v.a. $Q_X(U)$ a même loi que X.

Pour simuler X, on a calculé $Q_X(U)$ avec $U\sim\mathscr{U}_{]0,1[}$. Des exemples :

— Si $X\sim\mathscr{B}(p)$, $\forall u\in]0,1[\,,\ Q_X(u)=\begin{cases}0 & \text{si } u\leq 1-p\\ 1 & \text{si } 1-p<u<1\end{cases}$

— $X\sim\mathscr{E}(1)$ est définie par
$$\forall u\in]0,1[\,,\ Q_X(u)=-\ln(1-u)$$

— $X\sim\mathscr{U}_{]a,b[}$, $a<b$ est définie par

$$\forall u\in]0,1[\,,\ Q_X(u)=a+(b-a).u$$

— $G\sim\mathscr{N}(0,1)$, F_G et donc Q_G sont donnés[6] par la table 1 ou le graphe 4.

Le nom « fonction des quantiles » provient des fait suivants

— $Q_X(\frac{1}{2})$ est une médiane de X,

— $Q_X(\frac{1}{4})$ et $Q_X(\frac{3}{4})$ sont respectivement les premiers et troisième quartiles de X,

— $Q_X(\frac{1}{10})$ et $Q_X(\frac{9}{10})$ sont respectivement les premiers et derniers déciles de T,

Lorsque qu'on dit que les 10% des français les plus pauvres possèdent moins de 0,15% des avoirs totaux, on dit que, X représentant l'avoir d'un français tiré au hasard dans la population, si $t_{10\%}=Q_X(1/10)$, alors la somme des avoirs des personnes ayant moins que $t_{10\%}$ représente moins de 0,15% de la somme totale.

On rencontrera le cas suivant dans le chapitre de statistiques : Si $G\sim\mathscr{N}(0,1)$, $\alpha\in]0,1[$, déterminer, un intervalle I, centré en 0 tel que $\mathbb{P}(G\in I)=1-\alpha$.

Réponse : on prend $I=\left]-Q_G(1-\frac{\alpha}{2}),+Q_G(1-\frac{\alpha}{2})\right[$.

---

5. dont la formule générale (HP) est

$$\forall u\in]0,1[\,,\ Q_X(u)=\min\{x\in\mathbb{R},\ F_X(x)\geq u\}$$

6. **Il n'y a pas de formule simple en termes de combinaison algébrique de fonctions élémentaires usuelles de ces fonctions. Elles sont ajoutables, sans redondance, à la liste des fonctions élémentaires.**

En Python, on accède, grâce au module `scipy.stats`, à la fonction de répartition, resp. la fonction des quantiles, d'une distribution à densité via une instruction du type `loi.cdf()`, resp. `loi.ppf()` ou `loi` est le nom d'une loi implémentée dans le module [7]

Dans notre exemple précédent, une lecture graphique (ou un appel à la fonction) donne que, pour $\alpha = 0.05$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$

$$Q_G(0.975) \simeq 1.960$$

Listing 2 – python/quantiles.py

```
import numpy as np #numpy, indispensable
import matplotlib.pyplot as plt #pour grapher
#utilisation de
# loi.pdf(): probability density function (densité)
# loi.cdf(): cumulative distribution function (fct. rep.)
# loi.ppf(): percent point function
# (fct. des quantiles ou percentiles)
#import loi normale, param. loc=m, scale=sigma
#import loi exponentielle, param loc=HP, scale=lambda
#import loi uniforme sur [a,b], param loc=a, scale=b-a
from scipy.stats import norm,expon,uniform
u=np.linspace(0,1.0,100)
q=norm.ppf(u,loc=0.0,scale=1.0)#prêt à grapher
fig,ax1=plt.subplots()
ax1.plot(u,q,'b',label=r'$q=Q_G(u)$')


plt.legend(loc='center right')
#graduations
qu=np.asarray([0.005,0.025,0.05,0.125,0.5,0.875,0.95,0.975,0.995])
uq=norm.ppf(qu,loc=0,scale=1)
plt.xticks(qu,rotation=90)
for tl in ax1.get_xticklabels():
    tl.set_color('b')
ax1.set_xlabel('u',rotation='vertical',color='b')

plt.yticks(uq,rotation=70)
ax1.set_ylabel('q',rotation='vertical')

plt.grid()
plt.savefig('quantiles-normale.pdf',format='pdf')
plt.show()
```

7. Liste complète :`http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.16.0/reference/stats.html`

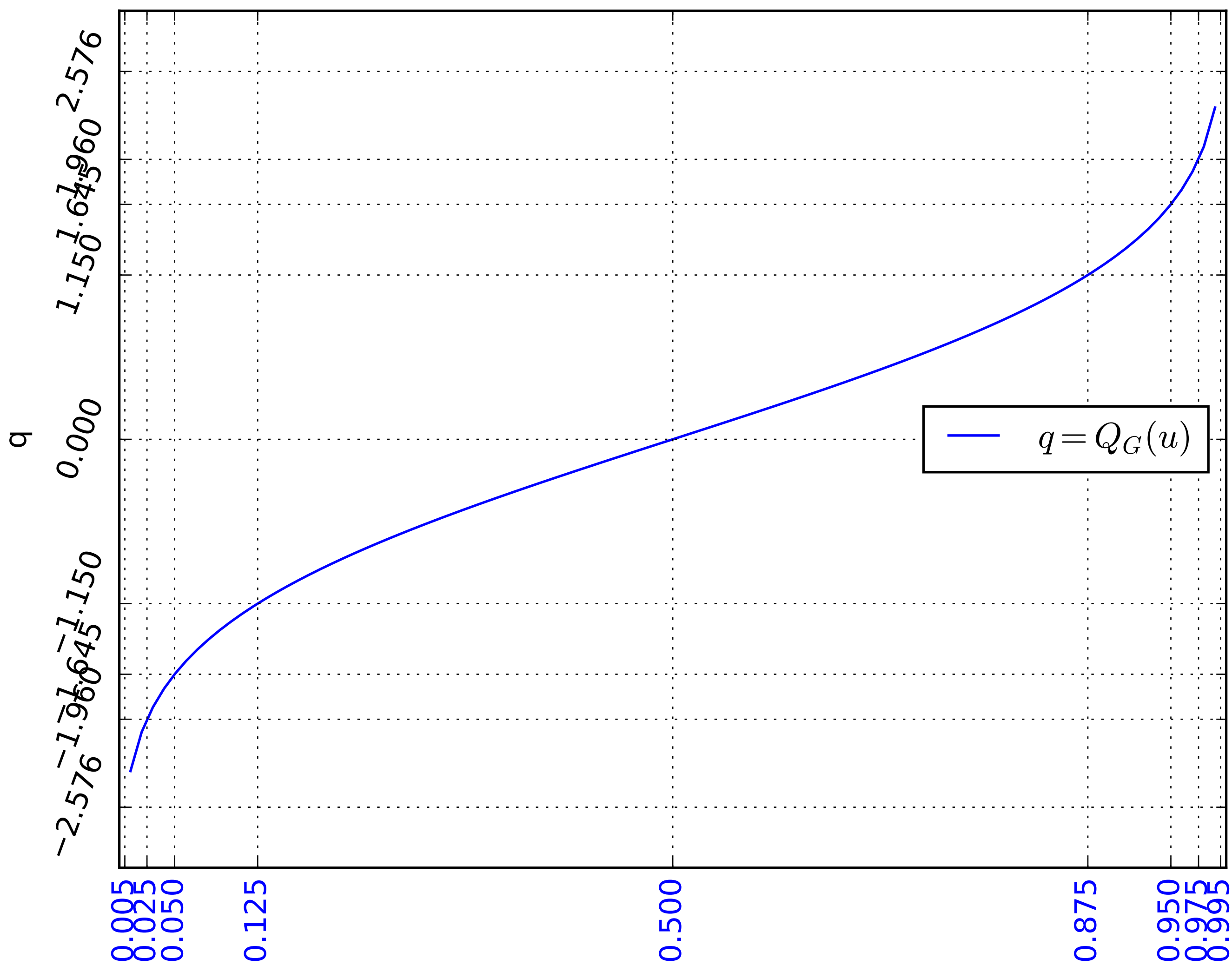

FIGURE 4 – Le graphe de la fonction des quantiles normale

u	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999

TABLE 1 – Table extraite du problème G2E 2014. Fonction de répartition d'une variable $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ à la case `u=ligne+colonne`, on lit $F_G(u) = \mathbb{P}(G \leq u)$. Lorsque $u < 0$, $-v > 0$ et on utilise la parité de la densité gaussienne pour avoir $F_G(u) = 1 - F_G(v)$

3 Indépendance

3.1 Loi du min, du max

La fonction de répartition est utile pour calculer une loi de variable aléatoire lorsque des opérations croissantes ou de min/max sont utilisées.

Exemple

Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes*, suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1. Soit

$$U = \min(X,Y) \text{ et } V = \max(X,Y)$$

Le but est de calculer les lois de U et V.

Ces formules sont adéquates pour être traitées via les fonctions de répartition.

Comme X et Y sont à valeurs réelles positives, il en est de même pour U et V. Pour $u < 0$ et $v < 0$, on a donc $F_U(u) = F_V(v) = 0$.

On a les égalités d'événements, pour $u, v \in \mathbb{R}$

$$\{U > u\} = \{X > u \text{ et } Y > u\} \text{ et } \{V \leq v\} = \{X \leq v \text{ et } Y \leq v\}$$

Traitement de V

Par indépendance de X et Y, on a, pour $v \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v) &= \mathbb{P}(X \leq v)\mathbb{P}(Y \leq v) \\ &= (1-e^{-v}).(1-e^{-v}) = 1 - 2e^{-v} + e^{-2v} \\ F_V(v) &= 1 - (2 - e^{-v})e^{-v} \end{aligned}$$

On en déduit, (théorème d'identification d'une fonction de répartition) que, comme F_V est une fonction de répartition, qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ (observer qu'elle se recolle bien en 0) qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec

$$F'_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 2(e^{-v} - e^{-2v}) & \text{si } v > 0 \end{cases}$$

alors V est une v.a. à densité et

$$V \sim 2(e^{-v} - e^{-2v})\mathbb{1}_{\{v>0\}}\, du$$

Traitement de U

Par indépendance de X et Y, on a, pour $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} 1 - F_U(u) = \mathbb{P}(U > u) &= \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(Y > u) \\ &= e^{-u}.e^{-u} = e^{-2u} \\ F_U(u) &= 1 - e^{-2u} \end{aligned}$$

On en déduit que $U \sim \mathscr{E}(2)$.

Exercice 17.— Statistiques d'ordre : premiers calculs.
1. On se donne X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Déterminer les fonctions de répartition puis les lois de $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$ lorsque

1. X et Y sont uniformément distribuées sur $[0,1]$.
2. X et Y suivent une loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

2. On se donne X_1, ..., X_n indépendantes, suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
2.a. Montrer que $\mu_n = \min(X_1,\dots,X_n)$ suit la loi $\mathscr{E}(n.\lambda)$.
2.b. Donner une densité, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de $M_n = \max(X_1,\dots,X_n)$. Montrer que celle-ci admet son maximum en $t_n = \frac{\ln n}{\lambda}$. Tracer son graphe.
2.c. Montrer que l'espérance de M_n est

$$\mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

2.d. Donner la fonction de répartition $\tilde{F}_n$ et une densité pour $\tilde{M}_n = \lambda.\frac{M_n}{\ln n}$.
2.e. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{F}_n(t)$ a une limite notée $F(t)$ lorsque $n \to +\infty$. Donner une formule simple pour F. Montrer que, quitte à modifier la valeur de F en *un* point, F est la fonction de répartition d'une variable d'un type particulièrement simple.

3.2 Sommes : Cas densité/discret fini

Une question récurrente est la suivante : étant données deux v.a.r X et Y, quelle est la loi de leur somme, $S = X+Y$. On examine ici le cas où X est une variable à densité X et Y une variable discrète prenant un nombre fini de valeurs, X et Y étant supposées *indépendantes*.

On suppose donc que

$$X \sim \delta_X(x)\,dx \text{ et } Y \text{à valeurs dans } \{y_1,\dots,y_K\}$$

On montre que S est à densité et

$$S \sim \left(\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(Y=y_k)\delta_X(s-y_k)\right)\,ds.$$

Une densité δ_S de S est donc donnée par la formule : $\forall s \in \mathbb{R}$, $\delta_S(s) = \mathbb{E}(\delta_X(s-Y))$.

Démonstration. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on a, en décomposant suivant les valeurs de Y,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y\in I) &= \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(X+Y\in I \text{ et } Y=y_k)\\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(X+y_k\in I \text{ et } Y=y_k) = \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(X+y_k\in I)\mathbb{P}(Y=y_k)\\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(Y=y_k)\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{x+y_k\in I\}}\delta_X(x)\,dx\\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(Y=y_k)\int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{s\in I\}}\delta_X(s-y_k)\,ds\\
&= \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{s\in I\}}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(Y=y_k)\delta_X(s-y_k)\right)\,ds
\end{aligned}$$

□

Exemples

Exercice 18.—On suppose $X \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$, $Y \sim \mathscr{U}_{\{0,\dots,5\}}$, X et Y indépendantes. Montrer que

$$S = X + Y \sim \mathscr{U}_{[0,6]}$$

Ce résultat est-il intuitif ?

Exercice 19.—On suppose $X \sim \mathscr{U}_{\{-1,0,+1\}}$ et $Y \sim \mathscr{U}_{[-1,1]}$, indépendantes. Calculer les lois de $S = X + Y$ et $T = X - Y$. Tracer les graphes des densités.

3.3 Sommes : La formule de convolution

Pour le cas où X et Y sont deux variables à densité, indépendantes, on *admet* la formule suivante.

Théorème 12: Formule du produit de convolution,admis

Soit X et Y deux v.a.réelles indépendantes,

$$X \sim \delta_X(x)\,dx \text{ et } Y \sim \delta_Y(y)\,dy$$

alors $S = X + Y$ est un v.a.r *à densité* dont une densité est la fonction δ_S définie par l'une des deux formules

$$\delta_S(s) = \int_{\mathbb{R}} \delta_X(x)\delta_Y(s-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \delta_X(s-y)\delta_Y(y)\,dy$$

Remarques :

1. Il se peut que pour certaines valeurs exceptionnelles de s, l'intégrale définissant $\delta_S(s)$ soit divergente vers $+\infty$. Pour de telles valeurs, rares en un sens, on convient que $\delta_S(s) = 0$.
2. On a :
$$\forall s \in \mathbb{R},\ \delta_S(s) = \mathbb{E}(\delta_X(s-Y)) = \mathbb{E}(\delta_Y(s-X)).$$

Exemples

Exercice 20.— On suppose $X, Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$, indépendantes. Donner la densité de $X + Y$.

Exercice 21.— On suppose $X \sim \mathscr{N}\left(m_x, \sigma_X^2\right)$ et $Y \sim \mathscr{N}\left(m_Y, \sigma_Y^2\right)$, indépendantes.
1. Soit $Z = X + Y$. Donner espérance et variance de Z.
2. Sachant que Z suit une loi normale, donner une formule pour une densité de Z.
3. (Calculatoire !) Montrer, par la formule du produit de convolution, que Z est effectivement une v.a.r normale.

Correction Ex.–20 Une densité de X est donnée par la formule $\forall x \in \mathbb{R},\ \delta_X(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}1\!\!1_{\{x\geq 0\}}$ et une densité de Y est donnée par la formule $\forall y \in \mathbb{R},\ \delta_Y(y) = \lambda.e^{-\lambda.y}1\!\!1_{\{y\geq 0\}}$. Comme X et Y sont indépendantes, une densité de $Z = X + Y$ est donc donnée par

$$\delta_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \delta_X(x)\delta_Y(z-x)\,dx$$

On a, pour $z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\delta_X(x)\delta_Y(z-x) &= \lambda.e^{-\lambda.x}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}.\lambda.e^{-\lambda.(z-x)}\mathbb{1}_{\{z-x\geq 0\}} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda.z}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{z\geq x\}} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda.z}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{z\geq x\geq 0\}}
\end{aligned}$$

Il est alors clair que si $z < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\delta_X(x)\delta_Y(z-x) = 0$ et donc $\delta_Z(z) = 0$.

Si $z \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \delta_X(x)\delta_Y(z-x)\,dx &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda.z}\,dx \\
&= \lambda^2.z.e^{-\lambda.z}
\end{aligned}$$

et en résumé, une densité δ_Z de Z est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \delta_Z(z) = \lambda^2.z.e^{-\lambda.z}\mathbb{1}_{\{z\geq 0\}}$$

Correction Ex.–21 On suppose $X \sim \mathcal{N}\left(m_x, \sigma_X^2\right)$ et $Y \sim \mathcal{N}\left(m_Y, \sigma_Y^2\right)$, indépendantes.
1. Soit $Z = X+Y$. On a $\mathbb{E}(X) = m_X$, $\mathbb{E}(Y) = m_Y$ et donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = m_X + m_Y$. On a $\mathbb{V}(X) = \sigma_X^2$, $\mathbb{V}(Y) = \sigma_Y^2$ et donc, par indépendance de X et Y, $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.
2. Sachant que Z suit une loi normale, on a donc

$$Z \sim \mathcal{N}\left(m_X + m_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$$

une densité de Z est donc δ_Z définie par

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \delta_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-(m_X+m_Y))^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}$$

3. On doit donc montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\delta_Z(z) &= \frac{1}{2\pi.\sigma_X.\sigma_Y}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-x-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-(m_X+m_Y))^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}
\end{aligned}$$

On sent la difficulté : ça se fait mais c'est très technique. Pour étayer le fait *à retenir* que la somme de deux v.a. normales indépendantes est une v.a normale, faisons le calcul dans le cas centré réduit, *i.e.* $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$.

Soit $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\delta_Z(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2)}\,dx\\
\text{(dvpt carrés)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(2x^2-2zx+z^2)}\,dx\\
\text{(forme canonique)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(2(x-\frac{z}{2})^2+\frac{1}{2}z^2)}\,dx = \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}\,dx\\
\text{(chgt de var } u=\sqrt{2}(x-\frac{z}{2})\text{)} &= \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\sqrt{2}2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,dx\\
\text{(val int. Gaussienne)} &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Et donc $Z \sim \mathcal{N}(0,2)$, comme annoncé.

Exercice 22.— Lois de sommes.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles *indépendantes* et $S = X+Y$, leur somme.

En appliquant la formule du produit de convolution, que l'on rappellera, donner la loi de S dans les cas

1. $X, Y \sim \mathcal{U}_{[-1,+1]}$;
2. $X, Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$; Calculer la loi $\Delta = X - Y$, leur différence.
3. $X \sim \mathcal{N}\left(m_X, \sigma_X^2\right)$, $Y \sim \mathcal{N}\left(m_Y, \sigma_Y^2\right)$; On traitera dans un premier temps le cas $m_x = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ pour se convaincre que la somme de deux variables normales indépendantes est aussi une variable normale.
4. $X \sim \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}e^{-x}1\!\!1_{\{x\geq 0\}}\,dx$, $Y \sim \frac{1}{(q-1)!}y^{q-1}e^{-y}1\!\!1_{\{y\geq 0\}}\,dy$, ou $p,q \in \mathbb{N}^*$

Exercice 23.— Montrer (par récurrence) que si $X_1,..,X_n$ sont indépendantes de même loi $\mathcal{E}(1)$, alors

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \frac{1}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-s}1\!\!1_{\{s\geq 0\}}\,ds$$

Quelle est l'espérance de S_n , sa variance ?

Exercice 24.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité et donner une formule pour sa fonction de répartition.

Une variable aléatoire X ayant pour densité f sera dite suivre la loi de CAUCHY.

2. Donner une fonction Python `Cauchy()` permettant de simuler une variable de CAUCHY en se basant uniquement sur l'existence de la fonction `np.random.rand()` retournant un réel aléatoire uniforme sur $]0,1[$.

3. On se donne X et Y deux v.a. de CAUCHY indépendantes et on pose $Z = \frac{1}{2}(X+Y)$. Démontrer, en utilisant la formule de convolution, que Z est encore une v.a. de CAUCHY.

Indication:On écrira, pour $x,s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$,

$$\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(s-x)^2} = \frac{1}{s.(s^2+4)}\left(\frac{2x+s}{1+x^2} + \frac{2(s-x)+s}{1+(s-x)^2}\right)$$

4. On se donne $X_1,..,X_n$ n v.a. de CAUCHY indépendantes et on pose $M = \frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$. Démontrer par récurrence que M est encore une v.a. de CAUCHY.