Corrections choisies 05

Séries

Correction Ex.–14

1. 1.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, comparer $\frac{1}{n}$, $\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ et $\int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t}$. Expliquer graphiquement cette comparaison.

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a,

1. Pour[1] $t \in [n-1,n]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{n}$,
2. Pour $t \in [n,n+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$,

En intégrant ces inégalités sur chacun des intervalles concernés (ils sont de longueur 1), on a

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{n} \geq \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t}$$

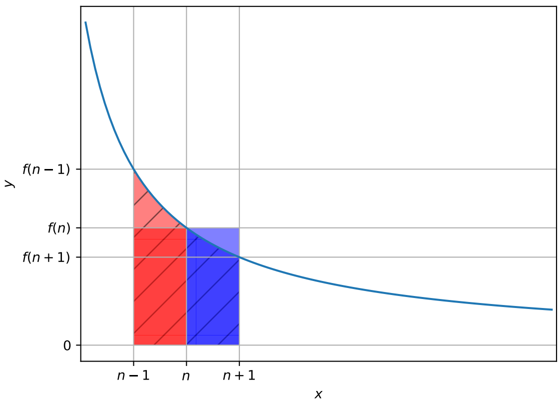

FIGURE 1 – Comparaison série-intégrale : cas d'intégrande décroissante

1.b. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

— En sommant la première des inégalités précédentes pour n variant de 2 à N, on obtient $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \int_{1}^{N} \frac{dt}{t} = \ln(N)$. En ajoutant à ceci le terme pour $n = 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(N)$$

— En sommant la deuxième des inégalités précédentes pour n variant de 1 à N, on obtient

$$\ln(N+1) = \int_{1}^{N+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

1.c. La minoration des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ tout juste obtenue montre que cette série est divergente.

1.d. On a, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$,

$$\frac{\ln(N+1)}{\ln N} \leq \frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}{\ln N} \leq 1 + \frac{1}{\ln N}$$

La limite lorsque $N \to +\infty$ des deux termes extrêmes de cette famille d'inégalités est 1. (On a notamment $\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)} = 1 + \frac{ln(1+\frac{1}{N})}{\ln(N)} \to 1$) et par le théorème des gendarmes,

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}}{\ln N} \to 1$$

Ceci montre que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim_{N\to+\infty} \ln N$$

1. Pour $n = 1$, ouvrir l'intervalle à droite

2. 2.a. La fonction $t \in]0, +\infty[\mapsto \ln(t)$ est strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Pour [2] $t \in [n-1, n]$, $\ln t \leq \ln n$,
2. Pour $t \in [n, n+1]$, $\ln t \geq \ln n$,

En intégrant ces inégalités sur chacun des intervalles concernés (ils sont de longueur 1), on a

$$\int_{n-1}^{n} \ln(t)\, dt \leq \ln n \leq \int_{n}^{n+1} \ln(t)\, dt$$

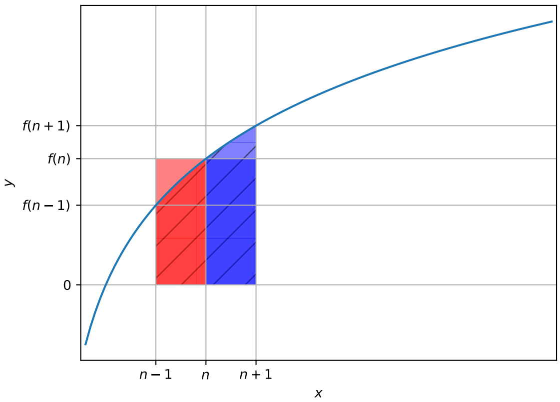

FIGURE 2 – Comparaison série-intégrale : cas d'intégrande croissante

2.b. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

— En sommant la première des inégalités précédentes pour n variant de 2 à N, on obtient $\sum_{n=2}^{N} \ln n \geq \int_1^N \ln(t)\, dt$. En ajoutant à ceci le terme pour $n = 1$, qui vaut 0, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \ln n \geq \int_1^N \ln(t)\, dt$$

— En sommant la deuxième des inégalités précédentes pour n variant de 1 à N, on obtient

$$\ln(N+1) = \int_1^{N+1} \ln(t)\, dt \geq \sum_{n=1}^{N} \ln n$$

2.c. $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$. (On peut la connaitre, ou effectuer une intégration par parties.)

On a donc, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^N \ln(t)\, dt = N\ln N - N + 1$$

et, lorsque $N \to +\infty$,

$$\frac{\int_1^N \ln(t)\, dt}{N\ln N} \to 1$$

De même,

$$\int_1^{N+1} \ln(t)\, dt = (N+1)\ln(N+1) - N$$

et, lorsque $N \to +\infty$,

$$\frac{\int_1^{N+1} \ln(t)\, dt}{N\ln N} \to 1$$

On a donc, pour $N \geq 2$,

$$\frac{\int_1^N \ln(t)\, dt}{N\ln N} \leq \frac{\ln(N!)}{N\ln N} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \ln(n)}{N\ln N} \leq \frac{\int_1^{N+1} \ln(t)\, dt}{N\ln N}$$

Les deux termes extrêmes de cette famille d'inégalités ayant pour limite 1 lorsque $N \to +\infty$, il vient

$$\ln(N!) \sim_{N\to+\infty} N\ln N$$

Le but de l'exercice est d'obtenir, pour chacune des séries divergentes $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$, une estimation asymptotique plus précise que celle obtenue dans les questions précédentes. La technique va simplement être de raffiner la comparaison avec l'intégrale.

2. Pour $n = 1$, ouvrir l'intervalle à droite

3. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([1,+\infty[)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
3.a. Prenons $u(t) = (t-(n+\frac{1}{2}))$, $u'(t) = 1$, $u(n) = -\frac{1}{2}$, $u(n+1) = \frac{1}{2}$, u et f sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n,n+1]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f(t)\,dt &= \int_n^{n+1} f(t).u'(t)\,dt \\ &= [f(t).u(t)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f'(t).u(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}(f(n)+f(n+1)) - \int_n^{n+1} f'(t).(t-(n+\frac{1}{2}))\,dt\end{aligned}$$

3.b. Prenons $u(t) = \frac{1}{2}(t-(n+\frac{1}{2}))^2$, $u'(t) = (t-(n+\frac{1}{2}))$, $u(n) = u(n+1) = \frac{1}{8}$, $u(n+1) = \frac{1}{2}$, u et f' sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n,n+1]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f'(t).(t-(n+\frac{1}{2}))\,dt &= \int_n^{n+1} f'(t).u'(t)\,dt \\ &= \left[f'(t).u(t)\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f''(t).u(t)\,dt \\ &= \frac{1}{8}(-f'(n)+f'(n+1)) - \frac{1}{2}\int_n^{n+1} f''(t).(t-(n+\frac{1}{2}))^2\,dt\end{aligned}$$

En replaçant dans la formule obtenue à la question précédente, on obtientla formule

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(n)+f(n+1)) + \frac{1}{8}f'(n) - \frac{1}{8}f'(n+1) + \frac{1}{2}\int_n^{n+1}(t-(n+\frac{1}{2}))^2 f''(t)\,dt$$

3.c. On pose $u_n = \frac{1}{2}\int_n^{n+1}(t-(n+\frac{1}{2}))^2 f''(t)\,dt$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, en additionnant les égalités précédentes pour n allant de 1 à N, on obtient, par CHASLES

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(f(n)+f(n+1)) + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{N}(f'(n+1)-f'(n)) + \sum_{n=1}^{N} u_n$$

— La première somme vaut $\sum_{n=1}^N f(n) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(N+1)$,
— la deuxième somme est téléescopique et vaut $\frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{8}f'(N+1)$

Finalement, il vient

$$\int_1^{N+1} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \frac{1}{2}f(N+1) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{8}f'(N+1) + \sum_{n=1}^{N} u_n$$

4. On se place dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$. **4.a.** On a alors $\forall x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.
4.b. Soit $n \geq 1$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1}{2}\int_n^{n+1}(x-(n+\frac{1}{2}))^2.\frac{2}{x^3}\,dx$$

Lorsque $x \in [n,n+1]$, on a
— $0 \leq |x-(n+\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2}$ et donc $0 \leq (x-(n+\frac{1}{2}))^2 \leq \frac{1}{4}$.
— $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{n^3}$,
— les 2 se neutralisant, il reste

$$|u_n| \leq \frac{1}{4n^3}$$

4.c. La majoration obtenue précédemment montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ (car $4n^3 \geq n^2$). On a majoré le terme général, *positif*, $|u_n|$ par le terme général d'une série convergente, par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente et donc convergente. On note S sa somme.
4.d. Soit $N \geq 1$, on a par les majorations issues du théorème $ACV \Rightarrow CV$ pour la première inégalité et du théorème de comparaison pour la seconde que

$$|\sum_{n=1}^{N} u_n - S| = |\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty}|u_n| \leq \frac{1}{4}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$$

Il nous reste à estimer $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. En s'inspirant de ce qui a été fait dans les premières questions, on remarque que $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc que pour $n \geq N+1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^3}$$

La série $\sum_{n\geq N+1}\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^3}$ est convergente et sa somme vaut $\int_N^{+\infty}\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t^2}\right]_N^{+\infty}=\frac{1}{2N^2}$. Par l'inégalité issue du théorème de comparaison, on a donc

$$0\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{2N^2}$$

Il reste finalement

$$|\sum_{n=1}^{N}u_n-S|\leq\frac{1}{8.N^2}$$

4.e. Soit $N\geq 1$, on a de l'égalité

$$\int_1^{N+1}f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{N}f(n)+\frac{1}{2}f(N+1)-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{8}f'(1)-\frac{1}{8}f'(N+1)+\sum_{n=1}^{N}u_n$$

avec $f(x)=\frac{1}{x}$, que [3]

$$\begin{aligned}\ln(N+1)&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2(N+1)}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8(N+1)^2}+\sum_{n=1}^{N}u_n\\&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2(N+1)}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8(N+1)^2}+S+\sum_{n=1}^{N}u_n-S\end{aligned}$$

Passons les choses du côté attendu, regroupons les constantes et nommons R_N le reste, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}&=\ln(N+1)-\frac{1}{2(N+1)}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-S}_{\gamma}+\underbrace{-\frac{1}{8(N+1)^2}+S-\sum_{n=1}^{N}u_n}_{R_N}\\&=\ln(N+1)+\gamma-\frac{1}{2(N+1)}+R_N\end{aligned}$$

où, par inégalité triangulaire, le fait que $(N+1)^2\geq N^2$ et l'ingéalité prouvée à la question précédente,

$$|R_N|\leq\frac{1}{8(N+1)^2}+|S-\sum_{n=1}^{N}u_n|\leq\frac{1}{8N^2}+\frac{1}{8N^2}=\frac{1}{4N^2}$$

On peut prendre $C=\frac{1}{4}$.
5. On se place dans le cas où $f(x)=\ln(x)$. **5.a.** On a $\forall x>0$, $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.
5.b. Soit $n\geq 1$, on a

$$|u_n|\quad\leq\quad\frac{1}{2}\int_n^{n+1}(x-(n+\frac{1}{2}))^2.\frac{1}{x^2}\,dx$$

Lorsque $x\in[n,n+1]$, on a

— $0\leq|x-(n+\frac{1}{2})|\leq\frac{1}{2}$ et donc $0\leq(x-(n+\frac{1}{2}))^2\leq\frac{1}{4}$.

— $\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{n^2}$,

Il reste

$$|u_n|\leq\frac{1}{8n^2}$$

5.c. La série $\sum_{n\geq 1}|u_n|$ est, par le théorème de comparaison (la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{8n^2}$ est réputée convergente), convergente. La série $\sum_{n\geq 1}u_n$ est donc absolument convergente et donc convergente. On note S sa somme.
5.d. Soit $N\geq 1$. Comme déjà expliqué, on a

$$|\sum_{n=1}^{N}u_n-S|\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}|u_n|\leq\frac{1}{8}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Il nous reste à estimer $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. En s'inspirant de ce qui a déjà été fait en termes de comparaison séries-intégrales, on remarque que $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc que pour $n\geq N+1$, on a

$$0\leq\frac{1}{n^2}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^2}$$

3. la première est une réécriture de la formule, pour la seconde, on ajoute et retranche S

La série $\sum_{n\geq N+1}\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^2}$ est convergente et sa somme vaut $\int_N^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_N^{+\infty}=\frac{1}{N}$. Par l'inégalité issue du théorème de comparaison, on a donc

$$0\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{N}$$

Il reste finalement

$$|\sum_{n=1}^{N}u_n-S|\leq\frac{1}{8.N}$$

5.e. Soit $N\geq 1$, on a de l'égalité

$$\int_1^{N+1}f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{N}f(n)+\frac{1}{2}f(N+1)-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{8}f'(1)-\frac{1}{8}f'(N+1)+\sum_{n=1}^{N}u_n$$

avec $f(x)=\ln x$, que [4]

$$(N+1)\ln(N+1)-N \quad = \quad \sum_{n=1}^{N}\ln n+\frac{1}{2}\ln(N+1)+\frac{1}{8}-\frac{1}{8(N+1)}+\sum_{n=1}^{N}u_n$$

Passons les choses du côté attendu, ajoutons retranchons S, regroupons les constantes et nommons R_N le reste, on a

$$\begin{aligned}\ln(N!)=\sum_{n=1}^{N}\ln(n) &= (N+1)\ln(N+1)-N-\frac{1}{2}\ln(N+1)+\underbrace{\frac{1}{8}-S}_{\gamma}+\underbrace{-\frac{1}{8(N+1)}+S-\sum_{n=1}^{N}u_n}_{R_N}\\ &= (N+1)\ln(N+1)-N-\frac{1}{2}\ln(N+1)+\gamma-\frac{1}{2}\ln(N+1)+R_N\end{aligned}$$

où, par inégalité triangulaire, le fait que $(N+1)\geq N$ et l'inégalité prouvée à la question précédente,

$$|R_N|\leq\frac{1}{8(N+1)}+|S-\sum_{n=1}^{N}u_n|\leq\frac{1}{8N}+\frac{1}{8N}=\frac{1}{4N}$$

On peut prendre $C=\frac{1}{4}$.

5.f. On peut modifier un peu cette égalité pour obtenir

$$\ln(N!) \quad = \quad N\ln(N+1)-N+\frac{1}{2}\ln(N+1)+\gamma-\frac{1}{2}\ln(N+1)+R_N$$

En passant l'égalité précédente à l'exponentielle, on a

$$N!=e^{\gamma}\sqrt{N+1}.(N+1)^N.e^{-N}.e^{R_N}$$

ce qui n'est pas exactement ce que l'on cherche. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{N+1}(N+1)^N}{\sqrt{N}N^N} &= \sqrt{1+\frac{1}{N}}(1+\frac{1}{N})^N\\ &\overset{N\to+\infty}{\to} e\end{aligned}$$

On a donc on a

$$N!=e^{\gamma}\sqrt{N}.N^N.e^{-N}.e^{R_N}.\alpha_N$$

où $\alpha_N\to e$, ce qui se traduit par

$$N!=e^{\gamma+1}\sqrt{N}.N^N.e^{-N}.e^{\rho_N}.$$

où $\rho_N\to 0$ lorsque $N\to+\infty$.

Remarque finale : On montre (par exemple à l'aide des intégrales de WALLIS) que la constante A vaut $\sqrt{2\pi}$. On vient d'obtenir la *formule de* STIRLING :

$$N!\sim_{N\to+\infty}\sqrt{2\pi.N}N^Ne^{-N}$$

4. la première est une réécriture de la formule, pour la seconde, on ajoute et retranche S