Lycée Pierre-Gilles de Gennes | **BCPST**
Mathématiques | **2023-2024**

Notes de cours 05

Séries

Table des matières

1 Introduction

1.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, à valeurs dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Considérer la convergence de la *série* de terme général u_n, notée $\sum_n u_n$, c'est considérer la convergence de la suite $(U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* définie par $\forall N\in\mathbb{N}, U_N=\sum_{n=0}^{N} u_n$.

Définition 1. *On dit que la série $\sum_n u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles $(U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, on note sa limite*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

et on appelle cette quantité la somme de la série $\sum_n u_n$.

Remarques :

1. si la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$, la série $\sum_n u_n$ est divergente mais on notera tout de même $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=+\infty$.
2. La série $\sum_n u_n$ est à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est à la fonction $t\in[0,+\infty[\mapsto f(t)$. La théorie en est plus élémentaire car il est plus aisé de définir une somme finie qu'une intégrale.
3. La théorie que nous allons développer est essentiellement parallèle à celle des intégrales généralisées.
4. On peut considérer des séries avec premier indice n_0 au lieu de 0.

1.2 Exemples 1 : séries téléscopiques

Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=v_{n+1}-v_n$. La série $\sum_n u_n$ est convergente si et seulement si la suite v_n est convergente et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n-v_0$$

Exemple avec décalage : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme vaut 1 : on a $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ et...

Exercice 1.-⋆⋆- Pour chacun des termes généraux de série suivants, donner la nature convergente ou divergente de la série et la valeur de la somme en cas de convergence.

1. $u_n=\ln\frac{1+n}{n}$, $n\geq 1$,
2. $u_n=\frac{n!}{n^{10}}$, $n\geq 1$,
3. $\frac{2}{n(n^2-1)}$, $n\geq 2$ (calculer $\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n-1}$)

Exercice 2.— Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de limite 0 et a, b, c trois nombres réels tels que $a+b+c=0$. Montrer que la série de terme général $u_n=a.v_n+b.v_{n+1}+c.v_{n+2}$ converge et calculer sa somme en fonction de a, c, v_0 et v_1.

Indication:Faire apparaitre des séries télescopiques

1.3 Exemples 2 : séries géométriques

Soit $q \neq 1$. Intéressons nous à la convergence de la série géométrique $\sum_n q^n$. La somme partielle d'ordre N se calcule et vaut

$$S_N(q) := \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} q^{N+1}$$

La suite $(S_N(q))_N$ converge (et donc la série $\sum_n q^n$ converge) si et seulement si $|q| < 1$ et, en cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Rq : pour $0 < q < 1$ et $\alpha > 0$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ joue pour les séries au rôle analogue à celui de la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto e^{-\alpha.t}$ pour les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty}$.

Exercice 3.-⋆- On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par la donnée de u_0 et de u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n$$

Donner une CNS sur u_0 et u_1 assurant la convergence de la série $\sum_n u_n$ est convergente et donner la valeur de sa somme en fonction de u_0 et u_1.

Soit $q \neq 1$. Intéressons nous à la convergence de la série géométrique *dérivée* $\sum_n n.q^n$. La somme partielle d'ordre N se calcule et vaut

$$S_N^{(1)}(q) := \sum_{n=0}^{N} nq^n = q.\frac{d}{dq}(\sum_{n=0}^{N} q^n) = q.\frac{dS_N(q)}{dq}$$

On a donc

$$S^{(1)}(q) = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{N+2}}{(1-q)^2} - (N+1)\frac{q^{N+1}}{(1-q)}$$

Par croissance comparée, la suite $(S_N^{(1)}(q))$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et, en cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n.q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Intéressons nous à la convergence de la série géométrique *dérivée seconde* $\sum_n n.(n-1).q^n$. La somme partielle d'ordre N se calcule et vaut

$$S_N^{(2)}(q) := \sum_{n=0}^{N} n.(n-1)q^n = q^2.\frac{d^2}{dq^2}(\sum_{n=0}^{N} q^n) = q^2.\frac{d^2 S_N(q)}{dq^2}$$

On a donc

$$S_N^{(2)}(q) = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + q^N(\text{polynome}(N))$$

Par croissance comparée, la suite $(S_N^{(2)}(q))$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et, en cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n.(n-1).q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3}$$

Remarque : pour $0 < q < 1$ et $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$, la suite $(n^k.q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ joue pour les séries au rôle analogue à celui de la fonction $t \in [0, +\infty[\mapsto t^k.e^{-\alpha.t}$ pour les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty}$.

Exercice 4.— Une autre méthode de calcul des séries géométriques première. et seconde.

1. Une technique de calcul : intégration par parties discrète.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n).v_n = u_{N+1}.v_N - u_0.v_0 - \sum_{n=1}^{N} u_n.(v_n - v_{n-1})$$

Indication:Séparer la somme, faire un décalage d'indice et regrouper

2. Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$.

2.a. En appliquant la formule précédente avec $v_n = q^n$, $u_n = n$, ou en utilisant la même technique que pour l'établissement de cette formule, donner une relation entre

$$\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1} \text{ et } \sum_{n=0}^{N} q^n$$

2.b. En déduire, lorsque $|q| < 1$, la valeur de la limite lorsque $N \to +\infty$ de $\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1}$.

3. Faire le même travail en écrivant

$$2\sum_{n=1}^{N} n.q^{n-1} = \sum_{n=1}^{N}((n+1)n - n(n-1))q^{n-1}$$

pour retrouver la valeur de la série géométrique dérivée seconde

1.4 Exemples 3 : séries téléscopiques/intégrales

On peut formuler une variante du premier exemple sous la forme suivante. Supposons qu'il existe une fonction numérique f définie, continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ telle que $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente alors $\sum_n u_n$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En effet, pour $N \in \mathbb{N}$, par CHASLES,

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{N+1} f(t)\,dt$$

et le résultat s'ensuit.

(Attention, pas de réciproque à ce niveau de généralité.)

Un exemple, qui montre le lien avec les séries téléscopiques : prenons $u_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+1)^2}$, comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2}$ est convergente, de valeur 1, la série $\sum_n u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$$

Cet exemple est en fait exactement le premier, on remarque que $u_n = F(n+1) - F(n)$ où F est une primitive sur $[0,+\infty[$ de $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^2}$, i.e. $F(t) = -\frac{1}{t+1}$.

2 Propriétés

Linéarité

1. La série somme de deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ est la série $\sum_n (u_n + v_n)$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\lambda . \sum_n u_n$ est la série $\sum_n (\lambda . u_n)$

Proposition 2. 1. *L'ensemble des séries numériques à termes dans $\mathbb{K}$, muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$-ev.*

2. *Le sous-ensemble E, constitué des séries numériques* convergentes *en est un sev et, $\forall (\sum_n u_n), (\sum_n v_n) \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda . u_n + \mu . v_n) = \lambda . (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) + \mu . (\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$$

En d'autres termes, l'application qui a une série convergente associe sa somme est une *forme* linéaire.
Exercice : Quelle est la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 . q^n$?

Positivité/Croissance

Proposition 3. 1. *Si $\sum_n u_n$ est une série convergente à termes* positifs *alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$*

2. *Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries convergentes, à termes réels et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

3. *Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n |u_n|$ sont deux séries numériques convergentes, alors*
$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

3 Critères de convergence

3.1 Séries à termes positifs

Rappel :Un critère d'existence de limite

Théorème 4. *Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite* **réelle, croissante** *alors*

1. *Soit U n'est pas majorée et alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.*
2. *Soit U est majorée et alors $\lim_{n \to +\infty} U_n$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Dans le deuxième cas, la limite est donc un majorant de U et c'est le plus petit de ces majorants. Posons $L = \lim_{n \to +\infty} U_n$, cela signifie que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq L$.
2. Si $M \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$ alors $L \leq M$.

Somme d'une série à termes positifs

Théorème 5. *Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs, $U = (U_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.*

1. *Soit U est majorée auquel cas la série $\sum_n u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est un nombre réel bien défini..*
2. *Soit U n'est pas majorée auquel cas la série $\sum_n u_n$ est divergente vers $+\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.*

Séries à termes positifs : le théorème de comparaison

Théorème 6. *Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes* **positifs**, *telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.*

1. *Si $\sum_n v_n$ est convergente alors $\sum_n u_n$ l'est aussi.*
2. *Si $\sum_n u_n$ est divergente (vers $+\infty$) alors $\sum_n v_n$ l'est aussi.*

Séries à termes positifs : Application 1

Montrer, en la majorant par une série convergente, que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

On a, pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

et comme on a

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad = \quad 1 - \frac{1}{N} \overset{N\to+\infty}{\to} 1$$

le théorème de comparaison montre que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente, de somme ≤ 1. Par CHASLES, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, de somme ≤ 2.

Séries à termes positifs : Application 2

Montrer, en la minorant par la série de terme général $\ln(1+\frac{1}{n})$, que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, la série *harmonique*, est divergente vers $+\infty$.

On a, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \geq \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

car

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

et comme on a

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) \quad = \quad \ln(N+1) \overset{N\to+\infty}{\to} +\infty$$

le théorème de comparaison montre que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente vers $+\infty$.

Les deux séries que nous venons de traiter sont des séries de référence. On énonce donc le résultat utilisable directement :

Théorème 7. — *La série (de* RIEMANN*) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.*

— *La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.*

Exercice 5.-⋆⋆-
1. Recherche de la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$?
2. Recherche de la nature de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$?

Séries à termes positifs : Application 3

La technique de la majoration ou minoration asymptotique, déja vue pour traiter les intégrales généralisées, s'applique aussi pour les séries à termes positifs.

Exercice 6.—
1. Montrer, en la majorant par une série convergente, que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3n^2-n+1}$ est convergente.
2. Quelle est la nature, convergente ou divergente, de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$?

Séries de référence

Le théorème de comparaison nécessite l'utilisation de séries de référence positives, dont la convergence ou divergence est déjà connue.

Les séries de référence au programme officiel sont

1. Les séries géométriques (et dérivées) de raison $q>0$.
2. La série de RIEMANN, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, *convergente*.
3. La série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$, *divergente*.

Exercice 7.—Comparaison aux séries de référence.

Donner la nature, convergente ou divergente des séries suivantes :
(i) $\sum_{n\geq 0}e^{-\sqrt{n}}$. (ii) $\sum_{n\geq 0}n^3.e^{-\sqrt{n}}$. (iii) $\sum_{n\geq 2}e^{-\ln\ln n}$.

Séries à termes positifs : le théorème d'équivalence

Théorème 8. *Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes* **positifs***, telles que $u_n\sim v_n$ lorsque $n\to+\infty$.*
Les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Exercice 8.—Comparaison aux séries de référence.

Donner la nature, convergente ou divergente des séries suivantes :
(i) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3+1}{n^4+5}$. (ii) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{n^4+5}$. (iii) $\sum_{n\geq 1}(e^{\frac{1}{n}}-1)$. (iv) $\sum_{n\geq 1}(1-\cos(\frac{1}{n}))$.

3.2 Séries absolument convergentes

Critère d'absolue convergence

Théorème 9. *Soit $\sum_n u_n$ une série numérique. Si $\sum_n |u_n|$ est convergente alors $\sum_n u_n$ est convergente.*

Définition 10. *Une série $\sum_n u_n$ vérifiant l'hypothèse du théorème est dite* absolument convergente. *Le théorème dit que si une série est ACV, elle est CV.*

Remarque : Dans les conditions du théorème, **une fois établie la convergence de** $\sum_n u_n$, on a, par croissance, l'inégalité

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$$

Démonstration. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, on se ramène à ce cas en considérant les parties réelle et imaginaire de u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = -\min(u_n, 0)$. On a $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$. Les séries $\sum_n u_n^+$ et $\sum_n u_n^-$ sont à termes positifs, majorées au sens [1] du théorème de comparaison par la série convergente $\sum_n |u_n|$. Par le théorème de comparaison, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum_n u_n^-$ le sont aussi. Comme par ailleurs, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n^+ - \sum_{n=0}^{N} u_n^-,$$

l'existence de limites finies lorsque $N \to +\infty$ pour les deux sommes partielles de droite garantit l'existence de la limite finie des sommes partielles à gauche.

Pour l'inégalité en remarque, il suffit de passer à la limite lorsque $N \to +\infty$ l'inégalité triangulaire pour les sommes finies

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

Cette procédé « passe bien » car on sait par ce qui a été fait précédemment que toutes les sommes partielles ont des limites □

Exercice 9.—Comparaison aux séries de RIEMANN, ACV.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}((-1)^n n + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n.n \sin \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^3}$ est convergente. Indication:On pourra se servir de l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.

4 Exemples–comparaisons à la série géométrique

4.1 Le développement décimal d'un nombre réel

Soit $(d_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre entiers compris entre 0 et et 9 (des « chiffres »).

Proposition 11. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{10^n}$ *est convergente.* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} \in [0, 1]$.

Démonstration. Posons, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{d_n}{10^n}$, $v_n = \frac{9}{10^n}$. On a alors, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et, comme $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente, de somme $9 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$, par le théorème de comparaison, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente, de somme comprise entre 0 et 1. □

Développement décimal d'un nombre réel.

Théorème 12. *Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre entier n_x et une suite $(d_n(x))_{n\geq 1}$ de « chiffres » de $\{0, \ldots, 9\}$ tels que*

$$x = n_x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n}$$

1. Il s'agit d'inégalités terme à terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

— *Si x n'est pas un nombre décimal, i.e. n'est pas un quotient d'un nombre entier par une puissance de* 10 *alors x admet un unique tel développement en série.*

— *Cette somme de série s'écrit usuellement comme* développement décimal illimité *du nombre x.*

$$x = n_x, d_1(x)d_2(x)\dots d_n(x)\dots$$

Démonstration. Cette démonstration est hors-programme et technique. Commençons par l'assertion d'unicité. Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons que

$$x = n_x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n} = n'_x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_n(x)}{10^n}$$

où $n_x, n'_x \in \mathbb{Z}$ et les d_n, d'_n sont des chiffres.

Retranchons les deux termes de l'égalité : on obtient

$$n_x - n'_x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_n(x)}{10^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n}$$

Comme le terme de droite est la différence de deux nombres entre 0 et 1, la différence $n_x - n'_x$ vaut -1, 0 ou 1.

Si cette différence vaut 1, alors, cela signifie que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_n(x)}{10^n} = 1 \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n} = 0$$

et donc $n_x = x = n'_x + 1$ et x est entier, ce qui est exclu. On a donc $n_x = n'_x$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_n(x)}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n}$.

Supposons que les suites $(d_n(x))_{n\geq 1}$ et $(d'_n(x))_{n\geq 1}$ sont distinctes. Il existe alors un premier indice $n_0 \geq 1$ tel que $d_{n_0}(x) \neq d'_{n_0}(x)$. On a

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{d'_n(x)}{10^n} - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{d_n(x)}{10^n} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n} - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{d'_n(x)}{10^n}$$

et, en multipliant par 10^{n_0} cette égalité, en décalant l'indice, on a, pour deux entiers distincts k et k',

$$k' - k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n+n_0}(x)}{10^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d'_{n+n_0}(x)}{10^n}$$

Le même argument que précédemment s'applique et montre que soit $k = k' + 1$, soit $k' = k + 1$, que les sommes de séries valent 0 ou 1 et que $10^{n_0}.x$ est un entier, ce qui est exclu.

On peut noter que lorsque x est un nombre décimal, il admet deux développements décimaux distincts, l'exemple type est celui de

$$1 = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0}{10^n}$$

$$0,999999\cdots = 1,0000000\dots$$

Les écritures décimales habituelles sont en fait des séries déguisées.

Passons maintenant au problème de l'existence d'une telle écriture d'un nombre quelconque sous forme de série.

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons, $n_x = \lfloor x \rfloor$, $x_0 = n_x$ et, par récurrence, sur n, $d_{n+1}(x) = \lfloor 10^{n+1}.(x - x_n) \rfloor$, $x_{n+1} = x_n + \frac{d_{n+1}(x)}{10^{n+1}}$.

Il est clair que $x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_n(x)}{10^n}$. Il reste donc à montrer que $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$ et que $0 \leq d_n(x) \leq 9$.

Pour ceci, il suffit de montrer, par récurrence sur n, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}$$

(Une conséquence de cette inégalité est que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq d_{n+1}(x) \leq 9$. pourquoi ?)

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : 0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}$

1. H_0 est vraie.
2. Supposons H_n vrai pour un certain entier n, alors, au rang $n+1$, on a

$$x - x_{n+1} = x - x_n - \frac{d_{n+1}(x)}{10^{n+1}}$$

et donc, comme, par définition de la partie entière

$$d_{n+1}(x) \leq 10^{n+1}.(x - x_n) < d_{n+1}(x) + 1$$

on a

$$0 \leq x - x_n - \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^{n+1}}$$

ce qui est H_{n+1}.

□

4.2 La convergence de $\sum_n n^k q^n$

Soit $k \in [0, +\infty[$. La série $\sum_n n^k q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.

On a déja traité, en les calculant, les cas $k = 0, 1, 2$. Si $|q| \geq 1$ alors le terme général de la série ne tend pas vers 0. Elle est grossièrement divergente.

Si $|q| < 1$. Montrons que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Lorsque $k > 1$, $|u_n| = n^k |q^n|$ est beaucoup plus grand que $|q|^n$, on ne peut pas appliquer le théorème de comparaison entre ces deux séries. Par contre, en prenant q' tel que $|q| < q' < 1$, et posons $v_n = q'^n$, on a

$$|u_n| = (n^k.(|q|q'^{-1})^n)q'^n = \varepsilon_n v_n$$

où, par les croissances comparées, $\varepsilon_n \to 0$. La suite ε_n est donc bornée, par une constante $C > 0$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n| \leq C.v_n$$

La série $\sum_n C.v_n$ est convergente et donc $\sum_n |u_n|$ l'est aussi et donc $\sum_n u_n$ est ACV, elle est donc CV.

4.3 La convergence de la série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. La série exponentielle prise en z est $\sum_n \frac{z^n}{n!}$. Cette série est absolument convergente.

En effet, supposons $z \neq 0$ et posons $u_n = \frac{z^n}{n!}$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|}{n+1}$$

Cette quantité tend vers 0 et donc, à partir d'un certain rang n_0, $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$ et, par récurrence, à partir de ce rang n_0, $|u_n| \leq 2^{-n}.2^{n_0}|u_{n_0}|$. Le terme de droite est le t.g. d'une série géométrique convergente et donc, par le thm de comparaison, $\sum_n |u_n|$ est convergente, $\sum_n u_n$ est donc ACV, donc CV.

5 Comparaisons à une intégrale

Séries de Riemann

Une technique standard pour prouver la convergence d'une série est de comparer cette série à une intégrale généralisée. Voici un exemple *très* classique qui étend ce que nous avons dans les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. (le résultat est hors-programme, la technique ne l'est pas du tout).

Proposition 13. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors*

1. *Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.*
2. *Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.*

On peut supposer $\alpha > 0$ car sinon la divergence est grossière. On se base sur l'inégalité, valable pour $n \geq 2$,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

On a donc, pour $N \geq 2$,

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

Suivant les cas, la minoration montre la divergence de la série, la majoration montre la convergence de la série.

Exercice 10.-⋆- En comparant $\frac{1}{n(\ln n)^2}$ avec $\int_n^{n+1} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

6 Un calcul explicite : valeur de la série exponentielle

On a montré que la série exponentielle en un certain x, $\sum_n \frac{x^n}{n!}$, est convergente et la question qui se pose est quelle est sa somme ?

Il est est assez rare que l'on puisse calculer explicitement la somme d'une série–le but de cette partie est donc d'expliciter une méthode.

On peut remarquer qu'une somme partielle d'ordre N de $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est un polynôme en x et que c'est le polynôme qui intervient dans le développement de TAYLOR de la fonction exp en 0 à l'ordre N.

Théorème 14.

$$\forall x \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Démonstration. La preuve (hors-programme) est basée sur la formule de TAYLOR avec reste intégral. Cette formule est aussi un moyen d'accès à la formule de TAYLOR–YOUNG.

Soit $x \in \mathbb{C}$, posons $E_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$e^x = E_N(x) + \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-t)^N . e^{tx}\, dt$$

Ce que l'on peut voir, par récurrence, grâce à une ipp

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{(1-t)^N}_{\text{à primitiver}} . \underbrace{e^{tx}}_{\text{à dériver } /t} dt &= \left[-\frac{(1-t)^{N+1}}{N+1} e^{tx} \right]_{t=0}^{t=1} + \frac{x}{N+1} \int_0^1 (1-t)^{N+1} e^{tx}\, dt \\ &= \frac{1}{N+1} + \frac{x}{N+1} \int_0^1 (1-t)^{N+1} e^{tx}\, dt \end{aligned}$$

De ceci, on déduit, par inégalité triangulaire pour l'intégrale ainsi que la majoration $|e^{tx}| \leq e^{|x|}$ lorsque $x \in \mathbb{C}$ et $t \in [0,1]$,

$$|e^x - E_N(x)| \quad \leq \quad \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|x|}$$

Le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$ et donc $E_N(x) \to e^x$. □

Exercice 11.— Justifier les égalités suivantes
1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\lambda^n}{n!} = \lambda . e^{\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$,
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

7 D'autres exercices

Exercice 12.—On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.
1. Montrer que cette suite converge, donner sa limite et montrer que

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n \sim_{n\to+\infty} -u_n$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 13.—
1. En singeant la preuve de la convergence de la série exponentielle, montrer que pour tout $x \in]-1,+1[$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge vers $-\ln(1-x)$.
2. A quelles autres expressions auriez-vous envie d'appliquer cette méthode ?

Exercice 14.—
1.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, comparer $\frac{1}{n}$, $\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ et $\int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t}$. Expliquer graphiquement cette comparaison.
1.b. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(N+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(N)$$

1.c. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$?
1.d. Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ lorsque $N \to +\infty$.
2.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, comparer $\ln(n)$, $\int_{n-1}^{n} \ln(t)\ dt$ et $\int_{n}^{n+1} \ln(t)\ dt$. Expliquer graphiquement cette comparaison.
2.b. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{1}^{N} \ln(t)\ dt \leq \sum_{n=1}^{N} \ln(n) \leq \int_{1}^{N+1} \ln(t)\ dt$$

2.c. Donner une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ et montrer que

$$\ln(N!) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n) \sim_{N\to+\infty} N\ln(N)$$

Le but de l'exercice est d'obtenir, pour chacune des séries divergentes $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$, une estimation asymptotique plus précise que celle obtenue dans les questions précédentes. La technique va simplement être de raffiner la comparaison avec l'intégrale.
3. Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}([1,+\infty[)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
3.a. Montrer quelle intégration par partie faire pour obtenir la formule

$$\int_{n}^{n+1} f(t)\ dt = \frac{1}{2}(f(n) + f(n+1)) - \int_{n}^{n+1} (t-(n+\frac{1}{2}))f'(t)\ dt$$

3.b. Montrer quelle intégration par partie faire pour obtenir la formule

$$\int_{n}^{n+1} f(t)\ dt = \frac{1}{2}(f(n) + f(n+1)) + \frac{1}{8}f'(n) - \frac{1}{8}f'(n+1) + \frac{1}{2}\int_{n}^{n+1} (t-(n+\frac{1}{2}))^2 f''(t)\ dt$$

3.c. On pose $u_n = \frac{1}{2}\int_{n}^{n+1} (t-(n+\frac{1}{2}))^2 f''(t)\ dt$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{1}^{N+1} f(t)\ dt = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \frac{1}{2}f(N+1) - \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{8}f'(1) - \frac{1}{8}f'(N+1) + \sum_{n=1}^{N} u_n$$

4. On se place dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$.
4.a. Que valent f', f'' ?

4.b. Montrer que pour $n \geq 1$,

$$|u_n| \leq \frac{1}{4n^3}$$

4.c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente. On note S sa somme.
4.d. (Difficile) Montrer que pour tout $N \geq 1$,

$$|\sum_{n=1}^{N} u_n - S| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{1}{8.N^2}$$

4.e. En déduire l'existence d'une suite (R_N), de deux constantes γ et C telles que, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N+1) + \gamma - \frac{1}{2(N+1)} + R_N$$

et

$$|R_N| \leq \frac{C}{N^2}$$

5. On se place dans le cas où $f(x) = \ln(x)$.
5.a. Que valent f', f'' ?

5.b. Montrer que pour $n \geq 1$,

$$|u_n| \leq \frac{1}{8n^2}$$

5.c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente. On note S sa somme.
5.d. (Difficile) Montrer que pour tout $N \geq 1$,

$$|\sum_{n=1}^{N} u_n - S| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \leq \frac{1}{8.N}$$

5.e. En déduire l'existence d'une suite (R_N), de deux constantes γ et C telles que, pour tout $N \geq 1$,

$$\ln(N!) = \sum_{n=1}^{N} \ln(n) = (N+1)\ln(N+1) - N - \frac{1}{2}\ln(N+1) + \gamma + R_N$$

et

$$|R_N| \leq \frac{C}{N}$$

5.f. En passant l'égalité précédente à l'exponentielle, montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que

$$N! = A.\sqrt{N}.N^N.e^{-N}.e^{\rho_N}$$

où $\rho_N \to 0$ lorsque $N \to +\infty$.

Remarque finale : On montre (par exemple à l'aide des intégrales de WALLIS) que la constante A vaut $\sqrt{2\pi}$. On vient d'obtenir la *formule de* STIRLING :

$$N! \sim_{N \to +\infty} \sqrt{2\pi.N}N^N e^{-N}$$