Corrections choisies 06

Variables aléatoires discrètes

Correction Ex.–20 Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la distribution de probabilité d'une certaine variable N à valeurs $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice P_N de N par la formule

$$\forall x \in]-1,+1[\,, P_N(x) = \mathbb{E}(x^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n.x^n$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq p_n, |x^n| \leq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |p_n.x^n| \leq p_n$$

Or $\sum_{n\geq 0} p_n$ est convergente (sa somme vaut 1) et donc, par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, puis le théorèmes $ACV \Rightarrow CV$, P_N est toujours bien définie, i.e. que la série de la définition est (absolument) convergente pour tout $x \in]-1,+1[$.
2. Dans le cas d'une v.a N de loi géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre p,, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = p.q^n$ avec $q = 1-p$. On a donc, pour $x \in]-1,+1[$,

$$P_N(x) = \mathbb{E}(x^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} p.q^n.x^n = p\frac{1}{1-q.x}$$

3. Dans le cas d'une v.a N de loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}$. On a donc, pour $x \in]-1,+1[$,

$$P_N(x) = \mathbb{E}(x^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}.x^n = e^{-\lambda}.e^{\lambda.x} = e^{\lambda.(x-1)}$$

4. On suppose N_1 et N_2 deux v.a. à valeurs entières indépendantes. On a, pour $x \in \{-1,\dots,+1\}$,

$$P_{N_1+N_2}(x) = \mathbb{E}(x^{N_1+N_2}) = \mathbb{E}(x^{N_1}.x^{N_2}) \overset{\text{indép.!!}}{=} \mathbb{E}(x^{N_1}).\mathbb{E}(x^{N_2}) = P_{N_1}(x)P_{N_2}(x)$$

5. Soient N_1, N_2 deux variables de POISSON, indépendantes, de paramètres respectifs λ et μ et $N = N_1+N_2$, pour $x \in]-1,+1[$, on a

$$P_N(x) = P_{N_1}(x).P_{N_2}(x) = e^{\lambda.(x-1)}.e^{\mu.(x-1)} = e^{(\lambda+\mu).(x-1)}$$

On reconnait la fonction génératrice d'une variable de POISSON, de paramètre $\lambda+\mu$.
Correction Ex.–29 Posons Nle nombre de victimes, $N = H+F$. On pose $q = 1-p$.
1. Les v.a. N, H et F sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $N = n$ (notons que $\mathbb{P}(N = n) > 0$), pour $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité d'évenements

$$\{N = n\} \cap \{H = k\} = \{N = n\} \cap \{F = n-k\}$$

— Si $k > n$, le membre de droite est l'événement impossible, sa probabilité est nulle et

$$\mathbb{P}(H = k|N = n) = \frac{\mathbb{P}(H = k \cap N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} = 0$$

— Si $k <= n$, en utilisant la connaissance de la loi conditionnelle de F sachant $N = n$, (on sait donc que pour tout ℓ, $0 \leq \ell \leq n$, $\mathbb{P}(F = \ell|N = n) = \binom{n}{\ell}p^\ell q^{n-\ell}$) puis la symétrie des coefficients binomiaux,

$$\mathbb{P}(H = k|N = n) = \frac{\mathbb{P}(H = k \cap N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} = \frac{\mathbb{P}(F = n-k \cap N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} = \mathbb{P}(F = n-k|N = n) = \binom{n}{n-k}p^{n-k}.q^k = \binom{n}{k}p^{n-k}.q^k$$

On a donc obtenu que, sachant $N = n$, la loi de H est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$.
2. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e.i $(\mathbb{P}(N = n), n \in \mathbb{N})$ (*i.e.* en « conditionnant sur les valeurs possibles de N »), pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(F = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F = k|N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(p\lambda)^k\frac{1}{k!}e^{\lambda.q}$$

La v.a F suit donc une loi $\mathscr{P}(\lambda.p)$ et symétriquement H suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda.q$

3. Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F = k \text{ et } H = \ell) &= \mathbb{P}(F = k \text{ et } N = k+\ell) = \mathbb{P}(F = k | N = k+\ell)\mathbb{P}(N = k+\ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k.q^\ell.\lambda^{k+\ell}\frac{1}{(k+\ell)!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda.p)^k}{k!}\frac{(\lambda.q)^\ell}{\ell!} \\
&= \mathbb{P}(F = k).\mathbb{P}(H = \ell)
\end{aligned}$$

Les variables H et F se révèlent donc indépendantes (il faut noter que le plus souvent, dans les problèmes, l'indépendance est une hypothèse de modélisation, dans le cas présent, l'indépendance est *conséquence* d'autres hypothèses, ici la présence de lois conditionnelles binomiales qui cachent donc une indépendance.

4. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e.i $(\mathbb{P}(H = \ell), \ell \in \mathbb{N})$ (*i.e.* en « conditionnant sur les valeurs possibles de H »)

$$\mathbb{P}(H = F) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2.p.q)^\ell}{(\ell!)^2}$$