Lycée Pierre-Gilles de Gennes **BCPST**
Mathématiques **2023-2024**

Notes de cours 06

Variables aléatoires discrètes

Table des matières

Ce que l'on cherche à faire

La théorie des probabilités de première année se concentre sur les v.a. pouvant prendre un nombre *fini* de valeurs. De telles variables sont issues d'*une* expérience simple ou de la répétition d'un nombre fini de telles expériences.

Se limiter à telles variables est une restriction empêchant des poser de questions très naturelles sur les expériences faites.

Proverbe 1 (Grand Shadok/J. ROUXEL)**.** *Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir.... En d'autres termes... Plus ça rate et plus on a de chances que ça marche...*

Si je fais une expérience qui a une chance sur deux de « marcher » :

— Combien faut il d'expériences, en moyenne, pour avoir le premier succès ?

— Combien faut il d'expériences, en moyenne, pour avoir deux, trois,... succès ?

Pour répondre à ce type de questions et d'autres, nous devons nous autoriser la possibilité de faire mentalement un nombre *infini* d'expériences et considérer des variables pouvant prendre *toutes* les valeurs entières.

Par exemple, si T est le nombre d'expériences à faire pour avoir le premier succès, T peut prendre toutes valeurs entières, et même, en cas d'échec total, la valeur « infini », ∞. La moyenne cherchée est l'*espérance mathématique* de T, $\mathbb{E}(T)$.

Nous avons esquissé le cadre théorique permettant l'extension du calcul des probabilités à des variables pouvant prendre une infinité de valeurs, en l'espèce, les variables aléatoires réelles *à densité*.

Ce même cadre, va nous permettre de traiter le cas de variables aléatoires X prenant leurs valeurs dans un ensemble *dénombrable* [1] $\mathscr{N}$. On se focalisera notamment sur les cas où

1. $\mathscr{N} = \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels
2. $\mathscr{N} = \mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs
3. $\mathscr{N} = \mathbb{N}^2$ ou $\mathscr{N} = \mathbb{Z}^2$ (Cas des couples de v.a discrètes entières)

Des exemples importants seront

1. X, compteur d'événements aléatoires,
2. X, l'instant où un événement survient dans une suite d'expériences
3. X, sommes, différences, couples de telles variables...

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ est une variable aléatoire réelle. En particulier, les questions de l'existence de l'espérance, de la valeur de son espérance, de sa variance sont des questions importantes.

Plus généralement, si $\mathscr{N}$ est dénombrable, X une v.a. à valeurs dans $\mathscr{N}$ et $f : \mathscr{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction alors $f(X)$ est une v.a réelle prenant ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $f(\mathscr{N})$.

1. Un ensemble $\mathscr{N}$ est dit *dénombrable* s'il est possible de numéroter par les entiers tous les éléments de $\mathscr{N}$ donc s'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathscr{N}$. Même si c'est hors de notre programme, il faut comprendre que :

— il y a de « petits » ensemble infinis, les ensembles dénombrables, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$; un produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable ;

— il y a d'autres ensembles infinis, non dénombrables, au premier rang desquels, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, tout intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et les ensembles du type $\{0,1\}^{\mathscr{N}}$ où $\mathscr{N}$ est infini.

Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, on ne ferait pas de théorie des variables aléatoires réelles à densité.

1 Le cadre

1.1 Evénements, probabilité et théorie des séries

Le cadre abstrait

Définition 2. *Un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *est composé de*

1. *Un ensemble* Ω*,*
2. *une famille* $\mathscr{A}$ *de parties de* Ω *appelée la* tribu des événements.
3. *Une application* $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$*, qui, à chaque événement,* $A \in \mathscr{A}$ *associe la probabilité de* A*.*

La famille $\mathscr{A}$ et l'application $\mathbb{P}$ *doivent* satisfaire des *axiomes* que lecteur est prié d'aller retrouver dans le chapitre sur les généralités de probabilités.

⋆⋆⋆

On fixe pour tout le chapitre un espace probabilisé quelconque $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Par *événement*, on entend un élément de la tribu des événements $\mathscr{A}$. Ce sont les seules parties de Ω dont on peut calculer la probabilité.

⋆⋆⋆

Rappelons la formule des probabilités totales, *i.e.* l'axiome d'additivité dénombrable d'une probabilité $\mathbb{P}$:

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'événements incompatibles, (i.e. deux à deux disjoints) alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

La somme est bien évidemment la somme de la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$.

Du fait de l'invariance d'une union infinie sous certaines opérations (renumérotation des événements, groupements par paquets), cette règle ne peut avoir de sens si l'on n'a pas à l'esprit les résultats suivants de théories des séries.

Trois lemmes de théorie des séries

NB : Ces trois lemmes ne sont pas au programme officiel. Ils structurent cependant toute la théorie.

Lemme 3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de nombres* positifs. *Que la série* $\sum_n u_n$ *soit convergente ou pas, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{I\subset\mathbb{N}, I \text{ fini}} \left(\sum_{i\in I} u_i \right)$$

Lemme 4 (Réordonnancement)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels.* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une bijection.*

1. *(Cas positif) Si la série* $\sum_n u_n$ *est à termes positifs OU*
2. *(Cas ACV) si la série* $\sum_n |u_n|$ *est convergente, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$$

avec, en guise de précisions :

1. *(Cas positif) les valeurs étant soient finies, soit ∞ ;*
2. *(Cas ACV) les deux séries étant absolument convergentes.*

La valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre des termes.

En conséquence, si $(u_n)_{n\in\mathscr{N}}$ est une suite numérique indicée par $\mathscr{N}$ dénombrable, si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathscr{N}$ est une bijection, et $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{\sigma(k)}$ une série à termes positifs ou ACV, on note

$$\sum_{n\in\mathscr{N}} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$$

Dans ce cas, le symbole $\sum_{n\in\mathscr{N}} u_n$ est possiblement le symbole ∞ (cas positif, divergent) ou un nombre. Il ne dépend pas du choix de la bijection σ. Il s'agit d'une extension au cas infini dénombrable du symbole $\sum_{n\in\mathscr{N}} u_n$ bien connu lorsque $\mathscr{N}$ est un ensemble fini. On rappelle que si $\mathscr{N}$ est vide, la convention est $\sum_{n\in\mathscr{N}} u_n = 0$

Lemme 5 (Paquets/super-CHASLES)**.** *Si $(\mathscr{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition[2] de $\mathscr{N}$ et*

1. *(Cas positif) Si $\sum_{n\in\mathscr{N}} u_n$ est à termes positifs OU*
2. *(Cas ACV) si $\sum_{n\in\mathscr{N}} |u_n|$ est finie ($\neq \infty$),*

alors

$$\sum_{n\in\mathscr{N}} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n\in\mathscr{N}_k} u_n \right).$$

Remarques :

1. (Cas positif) Que les sommes de séries soient finies soit ∞. Si l'une des sommes $\sum_{n\in\mathscr{N}_k} u_n = \infty$, la somme de droite vaut ∞.
2. (Cas ACV) Toutes les séries de la formule sont absolument convergentes

2. Les paquets $\mathscr{N}_k$ peuvent être formés d'un nombre fini ou infini dénombrable d'indices. Formellement

$$\mathscr{N} = \cup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{N}_k \text{ et } \forall k, \ell \in \mathbb{N}, k \neq \ell \Rightarrow \mathscr{N}_k \cap \mathscr{N}_\ell = \emptyset$$

Exemples de regroupement par paquets classiques (Les propositions énoncées sont au programme !) :

— $\mathscr{N} = \mathbb{N}$, $\mathscr{N}_0$ l'ensemble des entiers pairs, $\mathscr{N}_1$, l'ensemble des entiers impairs, $\mathscr{N}_k = \emptyset$ pour $k \geq 2$ donne le résultat :

Proposition 6. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs, resp. ACV alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathscr{N}_0} u_n + \sum_{n\in\mathscr{N}_1} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$$

Les deux séries du terme de droite étant à termes positifs (avec possibilité de valeur ∞), resp. ACV.

— $\mathscr{N} = \mathbb{Z}$, $\mathscr{N}_0$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathscr{N}_1$, l'ensemble des entiers strictement négatifs, $\mathscr{N}_k = \emptyset$ pour $k \geq 2$ donne le résultat :

Proposition 7. *Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ est à termes positifs, resp. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$ est finie alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathscr{N}_0} u_n + \sum_{n\in\mathscr{N}_1} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=1}^{+\infty} u_{-k}$$

Les deux séries du terme de droite étant à termes positifs (avec possibilité de valeur ∞), resp. ACV.

— (Tranches verticales) $\mathscr{N} = \mathbb{N}^2$, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{N}_k = \{(k,\ell), \ell \in \mathbb{N}\}$ donne le résultat :

Proposition 8. *Si $\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell}$ est à termes positifs, resp. $\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} |u_{k,\ell}|$ est finie alors*

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

Toutes les séries du terme de droite étant à termes positifs (avec possibilité de valeur ∞), resp. ACV.

On laisse au lecteur le soin de traiter les tranches horizontales de manière symétrique.

— (Tranches diagonales) $\mathscr{N} = \mathbb{N}^2$, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{N}_n = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2, k+\ell = n\} = \{(k, n-k), k \in \{0, \dots, n\}\}$$

donne le résultat :

Proposition 9. *Si $\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell}$ est à termes positifs, resp. $\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} |u_{k,\ell}|$ est finie alors*

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k} \right)$$

La série du terme de droite étant à termes positifs (avec possibilité de valeur ∞), resp. ACV.

Exercice 1.—Montrer que dans les conditions de la proposition 8, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \right)$$

Exercice 2.—Produit de séries à termes positifs ou ACV. On considère $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, resp. absolument convergentes, en considérant $w_{k,\ell} = u_k.v_\ell$, montrer que

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_k.v_\ell = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k} \right)$$

Indication:Traiter d'abord le cas ≥ 0 puis le cas ACV en démontrant que $\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} |u_k.v_\ell|$ est fini.

Les lemmes 4 et 5 donnent sens à l'axiome d'additivité dénombrable d'une probabilité $\mathbb{P}$:

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille disjointe d'événements et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection alors $(A_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi une famille disjointe d'événements et on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_{\sigma(k)}$. La probabilité de cette union ne dépend pas de l'ordre des termes, ce qui est cohérent avec le lemme 4 qui affirme que,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{\sigma(k)})$$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille disjointe d'événements et si $(\mathcal{N}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}$, alors
   — chaque $B_k = \cup_{n\in\mathcal{N}_k} A_n$ est un événement avec
   $$\mathbb{P}(B_k) = \sum_{n\in\mathcal{N}_k} \mathbb{P}(A_n)$$
   — La famille $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille disjointe d'événements et on doit avoir
   $$\mathbb{P}(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n\in\mathcal{N}_k} \mathbb{P}(A_n)$$
   — On a $\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \cup_{k\in\mathbb{N}} \cup_{n\in\mathcal{N}_k} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, ce qui est cohérent avec le lemme 5 qui affirme que,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n\in\mathcal{N}_k} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$

1.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 10. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si $\mathcal{N}$ est un ensemble* au plus dénombrable*, une variable aléatoire (sur Ω) à valeurs dans $\mathcal{N}$ est une application $X : \Omega \to \mathcal{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathcal{N}$,*
$$\{X = n\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = n\}$$
est un événement.

— Au plus dénombrable signifie *fini* ou en bijection avec $\mathbb{N}$. Par exemple, on peut prendre $\mathcal{N} = \mathbb{N}$, $\mathcal{N} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{N} = \mathbb{N}^2$, etc..
— $\mathbb{R}$ est « trop gros » et n'est pas au plus dénombrable. (CANTOR)
— Si X est une v.a à valeurs dans $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ alors $\{X \in \mathcal{N}'\}$ est un événement
$$\{X \in \mathcal{N}'\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in \mathcal{N}'\} = \cup_{n\in\mathcal{N}'} \{X = n\}$$
Par exemple, si X est à valeurs entières, $\{X \text{ est pair}\}$ est un événement. Il s'agit de l'événement $\{X \in 2\mathbb{N}\}$.
— Si $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ et X est une v.a à valeurs $\mathcal{N}$ alors $f(X)$ est une v.a à valeurs réelles à valeurs dans $f(\mathcal{N}) \subset \mathbb{R}$ qui est au plus dénombrable.
— Une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble $\mathcal{R}$ est dite *discrète* si l'ensemble de ses valeurs potentielles est au plus dénombrable. Dit de façon plus précise, s'il existe $\mathcal{N}$, une partie dénombrable de $\mathcal{R}$ telle que $\{X \in \mathcal{N}\}$ est un événement et
$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{N}) = 1$$
c'est à dire, si l'événement $X \in \mathcal{N}$ est *quasi-certain* (terminologie BCPST only) ou *presque-sûr* (terminologie universelle de New-York à Pekin)

Décomposer un événement

Définition 11. *Une famille d'événements* $(A_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *est appelée un système complet d'événements incompatibles*[3] *si*

$$\cup_{n\in\mathcal{N}} A_n = \Omega \text{ et } \forall n,m \in \mathcal{N}, m \neq n \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$$

Si X est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathcal{N}$ dénombrable, alors $(A_n)_{n\in\mathcal{N}} = (\{X=n\})_{n\in\mathcal{N}}$ est un s.c.e.i dénombrable. Ecrire, en utilisant l'axiome d'additivité de $\mathbb{P}$ que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \mathbb{P}(B \cap \{X=n\})$$

s'appelle *décomposer l'événement B suivant les valeurs de X* ou *calculer* $\mathbb{P}(B)$ *en conditionnant sur les valeurs de X*.

Cette formule s'écrit aussi à l'aide des probabilités conditionnelles (*formule des probabilités totales*)

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \mathbb{P}(B|X=n)\mathbb{P}(X=n)$$

Rq : si $\mathbb{P}(X=n)=0$ alors $\mathbb{P}(B|X=n)$ n'est pas défini. On prend comme convention dans cette formule que le produit

$$\mathbb{P}(B|X=n)\mathbb{P}(X=n) = 0$$

La formule des probabilités totales dénombrable.

Plus généralement, l'axiome d'additivité dénombrable implique que

Théorème 12. *Si* $A_1,\dots,A_\ell,\dots$ *est un système complet d'événements incompatibles,* dénombrable *alors, pour tout événement B,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B\cap A_\ell) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_\ell)\mathbb{P}(A_\ell)$$

Rq : là encore, si $\mathbb{P}(A_\ell)=0$ alors $\mathbb{P}(B|A_\ell)$ n'est pas défini. On prend comme convention dans cette formule que le produit

$$\mathbb{P}(B|A_\ell)\mathbb{P}(A_\ell) = 0.$$

On remarque aussi l'écriture alternative pour dénoter une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_\ell}(B) = \mathbb{P}(B|A_\ell)$.

3. Un *s.c.e.i.* On peut alléger cette définition et demander seulement que

$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathcal{N}} A_n) = 1 \text{ et } \forall n,m \in \mathcal{N}, m \neq n \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \cap A_m) = 0$$

Distribution/Loi d'une v.a à valeurs $\mathcal{N}$

Définition 13. *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble au plus dénombrable, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{N}$.*
La distribution *ou* loi *de X est la donnée de la famille des nombres positifs $(p_n)_{n\in\mathcal{N}}$ où*

$$\forall n \in \mathcal{N},\, p_n = \mathbb{P}(X = n)$$

1. Cette définition étend celle connue pour la distribution d'une variable prenant un nombre fini de valeurs.
2. Pour tout $n \in \mathcal{N}$, $0 \leq p_n \leq 1$ et $\sum_{n\in\mathcal{N}} p_n = 1$.
3. Si $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$,
$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{N}') = \sum_{n\in\mathcal{N}'} p_n$$
4. Si $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$, il est équivalent de donner la famille $(\mathbb{P}(X = n))_{n\in\mathcal{N}}$ ou la famille, plus large $\{\mathbb{P}(X \in I), I$ intervalle de $\mathbb{R}\}$. On a, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque, en décomposant suivant les valeurs de X,
$$\mathbb{P}(X \in I) = \sum_{n\in I\cap\mathcal{N}} p_n = \sum_{n\in\mathcal{N}} 1\!\!1_{\{n\in I\}} p_n$$

Espérance

On rappelle que la fonction $1\!\!1_A$, indicatrice de l'événément A est une variable aléatoire à valeurs dans [4] $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$. On a défini l'espérance de cette v.a par

$$\mathbb{E}(1\!\!1_A) = \mathbb{P}(A)$$

On rappelle aussi que l'espérance d'une v.a. réelle positive est, d'une manière générale, soit un nombre réel positif, soit la valeur ∞. Une v.a. réelle X admet une espérance [5] si l'espérance de sa valeur absolue est finie.

Espérance d'une v.a. réelle, ens. dénombrable de valeurs

Proposition-Définition 14. *Soit X une v.a prenant ses valeurs dans $\mathcal{N} = \{x_0,\dots,x_k,\dots\} \subset \mathbb{R}$. On pose $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.*

1. *On a $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k| p_k$, que cette quantité soit finie ou pas.*
2. *Si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ alors la variable X admet une espérance et on [6] a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k.p_k$*

Remarque : on peut étendre ces notions *verbatim* si X est discrète, à valeurs complexes.

Exercice 3.-⋆- Soit X une v.a. à valeurs entières positives. En utilisant librement la sommation par paquets [7], montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

4. C'est donc une variable de BERNOULLI de paramètre de succès $\mathbb{P}(A)$.
5. On dit aussi X est *intégrable*
6. Cette série est ACV.
7. On écrira $\mathbb{P}(X > n)$ sous forme d'une série.

Formule de transfert, ens. dénombrable de valeurs

Théorème 15. *Soit X une v.a prenant ses valeurs dans $\mathcal{N} = \{x_0, \dots, x_k, \dots\}$ dénombrable, $h : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.*

1. *On a $\mathbb{E}(|h(X)|) = \sum_{k=0}^{+\infty} |h(x_k)| p_k$, que cette quantité soit finie ou pas.*
2. *Si $\mathbb{E}(|h(X)|) < +\infty$, la variable $Y = h(X)$ admet une espérance et on a*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(h(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(x_k).p_k$$

Démonstration. (HP) Ce qu'il faut comprendre de la preuve c'est que, *par définition*, ayant posé $Y = h(X)$, Y est à valeurs dans $h(\mathcal{N})$, qui est dénombrable. Y est donc une v.a. réelle discrète. Il en est de même de $|Y| = |h|(X)$.

On a, pour chaque $y \in h(\mathcal{N})$, en posant $\mathcal{N}_y = \{n \in \mathcal{N}, h(n) = y\}$, l'égalité d'événements

$$\{Y = y\} = \{h(X) = y\} = \bigcup_{n \in \mathcal{N}_y} \{X = n\}$$

De l'additivité dénombrable de $\mathbb{P}$, on tire que pour tout $y \in h(\mathcal{N})$,

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{n \in \mathcal{N}_y} \mathbb{P}(X = n)$$

Enfin, en supposant dans un premier temps que $h(\mathcal{N}) \subset \mathbb{R}^+$ puis, dans un second temps que Y admet une espérance, on prouve que dans ces deux cas

$$\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in h(\mathcal{N})} y.\mathbb{P}(Y = y)$$

et finalement, par le lemme des paquets, lemme 5,

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{y \in h(\mathcal{N})} \sum_{n \in \mathcal{N}_y} y.\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \in \mathcal{N}} h(n).\mathbb{P}(X = n)$$

Noter pour comprendre l'enchainement des deux cas que prouver l'intégrabilité de Y revient à démontrer le le caractère fini de la somme $\sum_{n \in \mathcal{N}} |h(n)|.\mathbb{P}(X = n)$, *i.e.* le caractère ACV de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} h(x_k).p_k$. □

Espérance/Variance/Autres

Exercice 4.—

1. Donner la formule générale pour $\mathbb{E}(X^2)$ sachant que X est à valeurs entières. Idem pour $\mathbb{E}(X^k)$ où $k \in \mathbb{N}$. Traiter les cas où X ne prend que des valeurs entières positives, où X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
2. Donner la formule pour $\mathbb{E}(h(X))$ où $h(x) = x \ln x$ si $x > 0$, $h(0) = 0$. Donner une condition d'existence.

Exercice 5.— Dans chacun des cas suivants, donner la formule pour $\mathbb{E}(e^{i\theta.X})$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Existence ?

1. On suppose que X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=n) = p.(1-p)^n$ pour un certain $p \in]0,1[$. Simplifier la formule donnant $\mathbb{E}(e^{i\theta.X})$.
2. On suppose que X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}$ pour un certain $\lambda \in]0,+\infty[$. Simplifier la formule donnant $\mathbb{E}(e^{i\theta.X})$.

Nous allons revenir longuement sur ces deux exemples : lois géométriques et de POISSON.

2 Multiplier les expériences

On va s'intéresser dans cette partie à des *processus* aléatoires décrivant l'évolution, aléatoire, d'un système. Il s'agit de suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La variable X_n donne l'*état*, à l'instant n du système. X_n peut être à valeurs numériques mais aussi à valeurs plus composites : vecteur numérique, liste, caractère qualitatif, etc...

Ce qui est crucial, c'est de bien poser la nature des objets X_n car c'est ce qui permet de clarifier les calculs.

Les variables à valeurs numériques jouent un rôle prépondérant. Pour elles, tenter de calculer une espérance, une variance a un sens.

On va traiter un certain nombre d'exemples typiques : à chaque fois on spécifie l'expérience élémentaire, la façon de répéter l'expérience et une ou plusieurs variables aléatoires à valeurs entières dont on détermine la distribution.

2.1 Loi géométrique

Epreuve de BERNOULLI

Supposons que l'on dispose d'une pièce biaisée où la probabilité de sortir P est p, un nombre entre 0 et 1 et la probabilité de sortir F est [8] $q := 1-p$.

Le résultat de l'expérience est complètement décrit par un élément de $\{P,F\}$ et donc une v.a décrivant cette expérience est une v.a. X à valeurs dans cet ensemble satisfaisant

$$\mathbb{P}(X=P) = p \text{ et } \mathbb{P}(X=F) = 1-p = q$$

Une interprétation de cette expérience fondamentale est la suivante : Supposons une expérience (difficile) effectuée et A un événement portant sur son résultat :

Soit A (prob. p), soit $\overline{A}$ (prob. $1-p$) est réalisé. Si on pose $X = 1\!\!1_A$, X est une variable aléatoire, à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que

$$\mathbb{P}(X=1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

Une telle variable est appelée une variable de BERNOULLI avec probabilité de succés p.

Rappelons que au niveau des espérances,

$$\mathbb{E}(1\!\!1_A) = \mathbb{P}(A) = p$$

8. On adoptera systématiquement cette convention d'écriture avec p et $q = 1-p$ dès que l'on parlera d'expérience de BERNOULLI

Jouer jusqu'a la fin des temps

Donnons nous une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables de BERNOULLI, de proba. de succès p, *indépendantes*. Posons, à l'habitude, $q = 1-p$.

Cela signifie simplement que, pour toute famille finie d'indices distincts $n_1,\ldots,n_k$, toute famille $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$ de valeurs 0 ou 1,

$$\mathbb{P}(X_{n_1}=\varepsilon_1,\ldots,X_{n_k}=\varepsilon_k) = \mathbb{P}(X_{n_1}=\varepsilon_1)\ldots.\mathbb{P}(X_{n_k}=\varepsilon_k)$$

Une telle suite modèlise une suite de lancers indépendants d'une pièce biaisée. X_n est le résultat au n-ième lancer. Elle modèlise aussi la suite des résultats (échec/succès) lors d'une suite d'expériences identiques réputées indépendantes.

Attendre le succès, compter les échecs

Supposons $0 < p \leq 1$. Appelons T le *rang du premier succès* :

$$T = \min\{n\in\mathbb{N}^*, X_n = 1\}$$

Montrons d'abord que T est bien définie presque sûrement. Par cela on entend le fait, que

$$\mathbb{P}(\exists n\in\mathbb{N}^*, X_n = 1) = 1$$

Posons $A = \{\exists n\in\mathbb{N}^*, X_n = 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{X_n = 1\}$ et donc $\overline{A} = \{\forall n\in\mathbb{N}^*, X_n = 0\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}\{X_n = 0\}$. Ces deux ensembles sont des événéments. Par ailleurs, pour N fixé, destiné à tendre vers $+\infty$,

$$\begin{array}{rcl} \overline{A} & \subset & \cap_{n=1}^{N}\{X_n = 0\}, \\ 0 \leq \mathbb{P}(\overline{A}) & \leq & \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{N}\{X_n = 0\}) = \displaystyle\prod_{n=1}^{N}\mathbb{P}(X_n = 0) = q^N \overset{N\to+\infty}{\to} 0 \end{array}$$

On a donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ et $\mathbb{P}(A) = 1$. On définit précisémment T par

$$T = \begin{cases} \min\{n\in\mathbb{N}^*, X_n = 1\} & \text{sur } A \\ \infty & \text{sur } \overline{A} \end{cases}$$

T est une variable prenant ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$. Elle est *presque sûrement* à valeurs entières. $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

Calculons sa distribution. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(T = n) & = & \mathbb{P}(X_1 = 0,\ldots,X_{n-1} = 0, X_n = 1) \\ \text{(indépendance !)} & = & \mathbb{P}(X_1 = 0)\ldots.\mathbb{P}(X_{n-1} = 0).\mathbb{P}(X_n = 1) \\ & = & q^{n-1}p \end{array}$$

La distribution géométrique de paramètre p

Définition 16. *Soit $p \in]0,1]$. Une v.a. X suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$, noté $X \sim \mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$, si*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}.p = p.q^{n-1}$$

Si T est le rang d'arrivée du premier succès dans un processus de BERNOULLI de paramètre $0 < p \leq 1$ alors T suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

Le nombre S d'échecs avant le premier succès suit, lui, une loi « géométrique », hors programme, de paramètre p « sur $\mathbb{N}$ ». On a $T = S+1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = n) = p.q^n$$

Espérance et variance

Proposition 17. *Si T suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ sur $\mathbb{N}^*$ alors, T est intégrable, de carré intégrable et*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \frac{1}{p} \\ \mathbb{V}(T) &= \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

Exercice 6.—Donner l'espérance et la variance de $S = T-1$ si $T \sim \mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$.

Exercice 7.— Absence de mémoire
1. On suppose que T suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de probabilité de succès $0 < p < 1$.
Montrer que pour tous entiers naturels $m, n > 0$,

$$\mathbb{P}(T > n+m | T > n) = \mathbb{P}(T > m)$$

2. Réciproquement, on suppose donnée une variable aléatoire T, presque-sûrement à valeurs entières > 0 telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T > n+m) = \mathbb{P}(T > n).\mathbb{P}(T > m)$$

Montrer que T suit une loi géométrique. Comment déterminer le paramètre de succès ?
Quelle propriété similaire est satisfaite par une v.a. à densité exponentielle ? Quel est son nom ?

Exercice 8.— Soit X une v.a réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Soit $\alpha \in]0, +\infty[$.
1. On pose $Y = \alpha.X$. Quelle est la loi de Y ?
2. On pose $N = \lfloor Y \rfloor$ (la partie entière de Y). Quelle est la loi de N ? Donner espérance et variance.
3. En déduire une procédure pour simuler informatiquement une variable géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre p.

Exercice 9.-$\star$- Soient X_1 et X_2 deux v.a géométriques sur $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de paramètres respectifs p_1 et p_2.
On pose $U = \min(X_1, X_2)$, $V = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer les lois de U et V, leurs espérances.
Connaissez vous une propriété similaire sur les v.a. exponentielles ?

Exercice 10.— Les pandas étant en voie de disparition, on souhaite réaliser une réserve en considérant qu'il faut au moins r mâles et r femelles.

On en attrape suffisamment dans la nature, les mâles avec une probabilité p et les femelles avec une probabilité $q = 1 - p$ de sorte à obtenir au moins r mâles et r femelles. On note X le nombre total de pandas attrapés

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles prises par X ? Donner la loi de X.

Indication:On doit trouver $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1}(p^{n-r}q^r + p^r q^{n-r})$ pour $n \geq 2r$

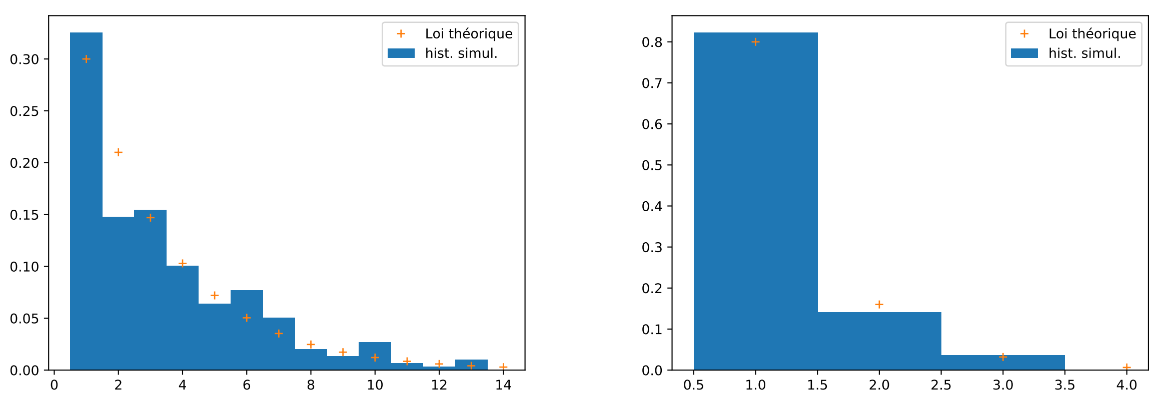
2. Que devient la loi de X si $p = q = \frac{1}{2}$? En déduire que

$$\sum_{n=2r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Simulation

Utiliser le script `simulation-geom.py`.



(a) Une simulation et la loi théorique $NS = 300$ tirages, $p = 0.3$

(b) Une simulation et la loi théorique $NS = 300$ tirages, $p = 0.8$

FIGURE 1 – Simulation de variable géométrique.

Compter les gains, attendre la ruine

Exercice 11.— Au cours d'une partie de pile ou face, on peut décider d'affecter un gain $+1$ en cas de succès, une perte -1 en cas d'échec. Posons $G_n = 2X_n - 1$. Il s'agit du gain à la partie n. $\mathbb{P}(G_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(G_n = -1) = 1 - p = q$. Si on démarre avec un capital k_0, $C_0 = k_0$, le capital à l'issue de la partie n sera

$$C_n = k_0 + \sum_{\ell=1}^{n} G_\ell$$

1. Quel est le lien entre C_n et $S_n := \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell$?

2. Quelle est la loi de C_n ? Quelle est son espérance ? Quelle est sa variance ?

Une question intéressante est la suivante : supposons que l'on se donne un seuil de perte et de gain maximal $K \in \mathbb{N}^*$. On décide de quitter la partie au rang n dès que $C_n = \pm K$. Quelle est la durée moyenne d'une telle partie ? Quelle est la probabilité de quitter la partie en gagnant ? en perdant ?

Pour la durée de jeu, le type de raisonnement qui menait à la loi géométrique ne peut s'appliquer : les variables C_n ne sont plus indépendantes !

Ce question est un problème classique nommé « Le problème de la ruine du joueur. » Dans la partie suivante, qui ne fait pas partie des fondamentaux du cours, on développe les outils pour attaquer ce problème. Tous ces outils sont à notre programme et la partie suivante pourrait faire l'objet d'un joli problème d'écrit.

2.2 Expériences enchainées : probabilités conditionnelles

2.2.1 Ruine du joueur et chaines de MARKOV

Recompter les gains, un autre jeu

On utilise les probabilités conditionnelles pour traiter le problème de la ruine du joueur et de la durée d'une partie.

Le point de départ est la relation fondamentale :

$$\mathbb{P}(C_{n+1} = k) = \mathbb{P}(C_n = k-1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(C_n = k+1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$$

Il s'agit de la formule des probabilités conditionnelles.(Détail)

On va jouer au jeu suivant : un damier rectiligne contient $2K+1$ cases numérotées $-K,\dots,0,\dots,K$. A l'instant 0, le pion est placé en k_0 et à chaque étape n, si on est sur une des cases centrales $-K+1,\dots,0,\dots,K-1$, suivant que $G_n = 2X_n - 1 = \pm 1$, on se déplace à droite ou à gauche sur le damier. Tant qu'on ne sort pas du damier, C_n est le numéro de la case sur laquelle on se trouve. L'instant d'arrêt est le moment où l'on saute sur l'une des cases $\pm K$.

On peut décider qu'à partir de ce moment, le pion reste bloqué sur cette case. On note (C_n^s) la suite des positions. Ce jeu se symbolise de la façon suivante et on reconnait là, le schéma typique symbolisant une chaine de MARKOV : Dessin !

Si on note $U_n = (u_{n,k})_{k\in\{-K,\dots,K\}}$ le vecteur tel que $u_{n,k} = \mathbb{P}(C_n^s = k)$. La position de départ donne U_0 tel que $u_{0,k_0} = 1$, $u_{0,k} = 0$ si $k \neq k_0$ et la relation fondamentale donne une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M.U_n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n.U_0$$

La matrice M, la *matrice de transition* ou *matrice de* MARKOV, vaut

$$M = \begin{pmatrix} 1 & (1-p) & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & (1-p) & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & p & 0 & (1-p) & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & (1-p) & 0 \\ 0 & & & & p & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & p & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, $M_{k\ell} = \mathbb{P}(C^s_{n+1} = k | C^s_n = \ell)$.

Peut-on calculer la matrice M^n ?

D'un point de vue théorique et par souci de complétude, on peut diagonaliser M. C'est difficile et on ne donne que les résultats (qui sont faciles à vérifier *a posteriori*).

On suppose $p \in]0,1[$.

1. On peut remarquer que 1 est valeur propre et que $\dim E_1 \geq 2$. Les vecteurs

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_{2K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   forment une famille libre de E_1.

2. Posons maintenant, en indiçant vecteurs et matrice M par $\{-K,\dots,K\}$, pour $\ell \in \{1,\dots,2K-1\}$, $\lambda_\ell = 2.p^{\frac{1}{2}}(1-p)^{+\frac{1}{2}} \cos \frac{\ell.\pi}{2K}$ et définissons v_ℓ par
   - Si ℓ est impair, $v_{\ell,k} = p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{-\frac{k}{2}} \cos \frac{k.\ell.\pi}{2K}$ pour $k \in \{-K+1,\dots,K-1\}$,
   - Si ℓ est pair, $v_{\ell,k} = p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{-\frac{k}{2}} \sin \frac{k.\ell.\pi}{2K}$ pour $k \in \{-K+1,\dots,K-1\}$,

   et enfin $v_{\ell,-K} = \frac{1-p}{\lambda_k - 1} v_{\ell,-K+1}$ et $v_{\ell,K} = \frac{p}{\lambda_k - 1} v_{\ell,K-1}$

   Notons que les nombres λ_ℓ sont tous distincts (il y en a donc $2K-1$), strictement compris entre -1 et 1 et placés de manière symétrique par rapport à zéros.

   On peut vérifier que $v_\ell \neq 0$ et $M.v_\ell = \lambda_\ell.v_\ell$.

3. Les valeurs propres de M hormis 1 sont donc les λ_ℓ. Comme on a

$$\dim E_1 + \sum_{k=1}^{2K-1} \dim E_{\lambda_k} \geq 2 + (2K-1) = 2K+1$$

   La matrice M est diagonalisable. On a $\dim E_1 = 2$. Les vecteurs

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_{2K} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

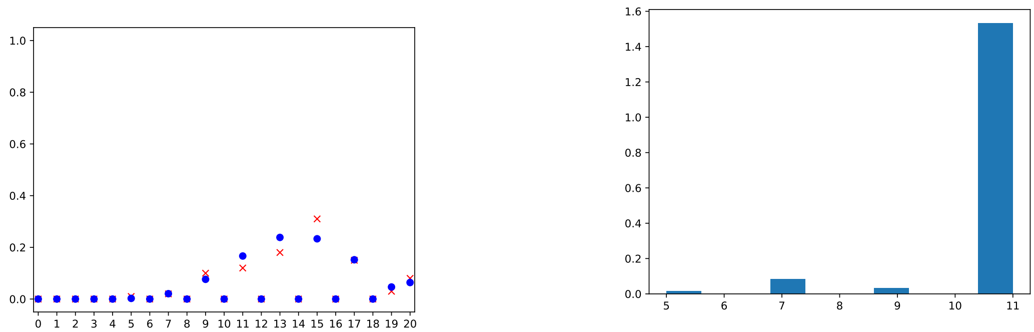
   forment une base de E_1. Les valeurs propres autres que 1 sont, en module, < 1. De ceci on déduit que pour toute position de départ codée par le vecteur U_0, la suite $M^n.U_0$ converge vers une distribution limite, combinaison linéaire de v_0 et v_{2K}.

Espérance du gain à la sortie

Trouver la loi de l'instant de sortie T,

$$T = \begin{cases} +\infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, C_n \neq \pm K \\ \min\{n \in \mathbb{N}, C_n = \pm K\} & \text{sinon} \end{cases}$$

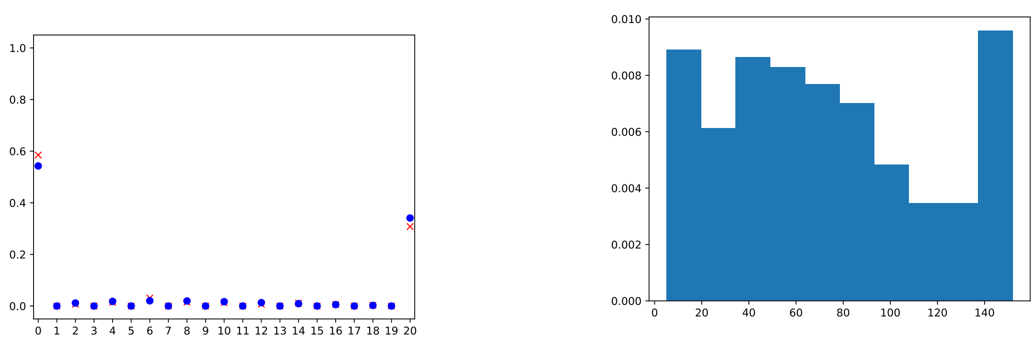
voire calculer simplement son espérance, est relativement compliqué. On peut montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ et en tracer un histogramme empirique issu de simulation. L'instant de sortie dépend de la position initiale.



(a) Distrib. position finale.

(b) Distribution temps de sortie : Au bout de 10 tours, le jeu n'est dans la plupart des cas pas fini

FIGURE 2 – Ruine du joueur : $p = 0.45$, $K = 10$, $k_0 = 5$, 10 tours de jeu, 100 simulations.



(a) Distrib. position finale.

(b) Distribution temps de sortie : Le jeu est fini en moins de 151 tours dans 90% des cas.

FIGURE 3 – Ruine du joueur : $p = 0.45$, $K = 10$, $k_0 = 5$, 151 tours de jeu, 1000 simulations.

Assez curieusement, il est « assez » facile de calculer $\mathbb{E}(f(C_T))$ où $f : \{-K,+K\} \to \mathbb{R}$ est donnée à l'avance.

En effet, pour $k_0 \in \{-K,\ldots,+K\}$, posons $\phi_{k_0} = \mathbb{E}(f(C_T))$ où, rappelons le, $C_0 = k_0$. On a $\phi_K = f(K)$, $\phi_{-K} = f(-K)$ et, pour $|k_0| < K$,

$$\begin{aligned}\phi_{k_0} &= \mathbb{E}(f(C_T)|G_1 = +1)\mathbb{P}(G_1 = +1)\\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}(f(C_T)|G_1 = -1)}_{\phi_{k_0+1}\,?}\underbrace{\mathbb{P}(G_1 = -1)}_{1-p} = p.\phi_{k_0-1} + (1-p)\phi_{k_0+1}\end{aligned}$$

La suite (indexée par $k \in \{-K,\ldots,+K\}$) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X = p + (1-p)X^2$ dont les deux racines sont 1 et $\frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}$.

Si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe donc deux constantes réelles λ, μ telles que

$$\phi_k = \lambda + \mu \frac{p^k}{q^k}$$

En utilisant les valeurs extrémales, on a

$$\lambda = \frac{q^{2K}f(K) - p^{2K}f(-K)}{q^{2K} - p^{2K}}, \mu = -\frac{p^K q^K (f(K) - f(-K))}{q^{2K} - p^{2K}}$$

Si $p = q = \frac{1}{2}$, je vous laisse écrire ce qui se passe.

La probabilité de gagner, ou de perdre se lit sur cette formule, pourquoi ?

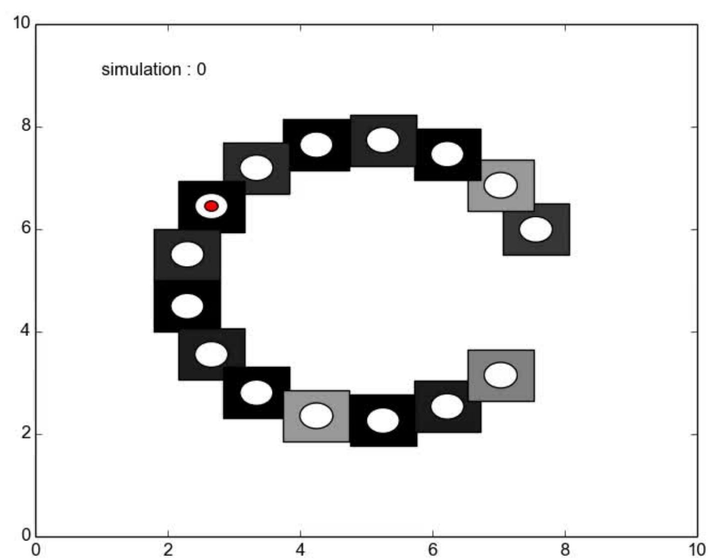
2.2.2 Traitement informatique

Utiliser le script `ruine-joueur.py`. Ce script traite de la ruine du joueur et a permis de tracer les histogrammes présentés précédemment. Le code de simulation de chaine de MARKOV est universel et peut-être adapté pour toute chaine dont la matrice de transition a une taille « raisonnable ». (Eviter de dépasser 10000×10000). **Savoir programmer la simulation d'une chaine de MARKOV sera, à mon avis, un exercice typique de l'oral maths-info.**

Utiliser le script `ruine-joueur-animation.py`. Ce script permet de faire une simulation de la ruine du joueur et de présenter une animation montrant l'évolution entre fréquences observées et fréquences théoriques.

On a pris $p = 0.45$, on fait à chaque fois 20 tours de jeu et on note la case finale sur laquelle on est tombés.

La couleur de fond de chaque rectangle indique la fréquence théorique de chaque case, la couleur du disque intérieur marque la fréquence calculée au fûr et à mesure des simulations.



2.3 Loi de POISSON

Loi de POISSON

Proposition-Définition 18. *Une variable aléatoire N à valeurs entières ≥ 0 est dite suivre la loi de* POISSON *de paramètre $\lambda > 0$, ce qu'on note*

$$N \sim \mathscr{P}(\lambda)$$

si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

On a

$$\mathbb{E}(N) = \lambda, \mathbb{V}(N) = \lambda$$

Approximation binômiale–POISSON

La loi de POISSON est aussi appelée la *loi du nombre d'événements rares* sur un intervalle de temps donné.

Imaginons que nous sommes sur une chaine de fabrication de circuits éléctroniques.

1. La fabrication est suffisamment bien contrôlée pour que la probabilité qu'un circuit donné soit défectueux est très petite (un événement rare, donc). Le caractère défectueux d'un circuit est indépendant des autres circuits (poussières, micro-coupures,....)
2. Par contre, la chaine fabrique énormément de circuits par unité de temps ΔT
3. et on remarque que la moyenne du nombre du circuits défectueux par unité de temps ΔT est proportionnelle à la durée de cette unité de temps, *i.e.* vaut $\sim \lambda.\Delta T$.

Sous ces conditions, j'affirme que le nombre de circuits défectueux fabriqués sur une durée de ΔT suit approximativement une loi de POISSON de paramètre $\lambda.\Delta T$.

En effet, on modélise cette situation de la façon suivante : On se donne un intervalle de temps $I = [T_0, T_0 + \Delta T]$ pendant lequel on fabrique $\mathscr{N}$ circuits. On numérote les circuits de 0 à $\mathscr{N} - 1$ et on suppose que le circuit numéro n tombe de la chaine pendant l'intervalle de temps

$$I_n := \left[T_0 + \frac{n}{\mathscr{N}}\Delta T, T_0 + \frac{n+1}{\mathscr{N}}\Delta T\right], n \in \{0, \ldots, \mathscr{N} - 1\}$$

On note $X_n = 1$ si le circuit n est défectueux, $X_n = 0$ sinon. Les hypothèses se traduisent par :

1. Les v.a. de BERNOULLI $X_0, \ldots, X_{\mathscr{N}-1}$ sont indépendantes, identiquement distribuées et suivant une loi $\mathscr{B}(p_{\mathscr{N}})$ où $0 < p_{\mathscr{N}} < 1$ est « petit ».
2. Le nombre $N(\Delta T)$ de circuits défectueux a pour espérance

$$\mathbb{E}(N(\Delta.T)) \simeq \lambda.\Delta T$$

3. $\mathscr{N}$ est très grand

Comme $N(\Delta T) = \sum_{n=0}^{\mathscr{N}-1} X_n$ alors $N(\Delta.T)$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(\mathscr{N}, p_{\mathscr{N}})$. Son espérance est donc

$$\mathbb{E}(N(\Delta T)) = \mathscr{N}.p_{\mathscr{N}} \text{ et } p_{\mathscr{N}} \sim \lambda.\frac{\Delta T}{\mathscr{N}}$$

On a donc, pour tout $k \in \{0, \dots, \mathscr{N}\}$,

$$\mathbb{P}(N(\Delta.T) = k) = \binom{\mathscr{N}}{k} p_{\mathscr{N}}^k (1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N} - k}$$

et on démontre ce qui donne un sens rigoureux à l'affirmation faite en posant $\mu = \lambda.\Delta T$:

Proposition 19. *Soit $\mu > 0$, et pour $\mathscr{N} \in \mathbb{N}$, $p_{\mathscr{N}} = \frac{\mu}{\mathscr{N}} + o\left(\frac{1}{\mathscr{N}}\right)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\binom{\mathscr{N}}{k} p_{\mathscr{N}}^k (1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N} - k} \overset{\mathscr{N} \to +\infty}{\to} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

Démonstration. Fixons $k \in \mathbb{N}$. On peut supposer que $\mathscr{N} \geq k$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\mathscr{N}} p_{\mathscr{N}}^k (1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N} - k} &= \frac{\mu^k}{k!} (1 - p_{\mathscr{N}})^{-k} . \left(\frac{1}{\mathscr{N}} + o\left(\frac{1}{\mathscr{N}} \right) \right)^k \frac{\mathscr{N}!}{(\mathscr{N} - k)!} (1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N}} \\
&= \frac{\mu^k}{k!} (1 - p_{\mathscr{N}})^{-k} . (1 + o(1))^k \frac{\mathscr{N}}{\mathscr{N}} . \frac{\mathscr{N} - 1}{\mathscr{N}} \dots \frac{\mathscr{N} - (k-1)}{\mathscr{N}} (1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N}}
\end{aligned}$$

Comme

$$(1 - p_{\mathscr{N}})^{-k} . (1 + o(1))^k \overset{\mathscr{N} \to +\infty}{\to} 1 \text{ et } \frac{\mathscr{N}}{\mathscr{N}} . \frac{\mathscr{N} - 1}{\mathscr{N}} \dots \frac{\mathscr{N} - (k-1)}{\mathscr{N}} \overset{\mathscr{N} \to +\infty}{\to} 1$$

Il nous reste, pour conclure, à prouver que

$$(1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N}} \overset{\mathscr{N} \to +\infty}{\to} e^{-\mu}$$

On a

$$\begin{aligned}
(1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N}} &= \left(1 - \frac{\mu}{\mathscr{N}} (1 + o(1) \right)^{\mathscr{N}} \\
&= \exp\left(\mathscr{N} \ln\left(1 - \frac{\mu}{\mathscr{N}} (1 + o(1)) \right) \right)
\end{aligned}$$

Or

$$\ln\left(1 - \frac{\mu}{\mathscr{N}} (1 + o(1)) \right) \sim_{\mathscr{N} \to +\infty} - \frac{\mu}{\mathscr{N}} (1 + o(1)) \sim - \frac{\mu}{\mathscr{N}}$$

et donc

$$\mathscr{N} . \ln\left(1 - \frac{\mu}{\mathscr{N}} (1 + o(1)) \right) \sim_{\mathscr{N} \to +\infty} -\mu$$

et finalement,

$$(1 - p_{\mathscr{N}})^{\mathscr{N}} \overset{\mathscr{N} \to +\infty}{\to} e^{-\mu}$$

$\square$

La pluie qui tombe

Imaginons que pour un TIPE, on enregistre la pluie qui tombe afin de déterminer l'intensité de l'averse.

Qu'entend-on ? Des plics, des plics et des plocs. Chacun de ces sons donne un "top horaire" sur la bande son. On compte le nombre de tops $N(\Delta t)$ sur une certaine durée Δt à différents moments.

Comment se distribue cette quantité ?

Modélisons la situation des plics-plocs de la pluie : la durée entre le "top horaire" de rang n (le plic) et celui de rang $n+1$ (le ploc) est notée E_{n+1}.

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables *indépendantes*, suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Pourquoi ? ceci est du à la propriété d'*absence de mémoire* de cette loi.

$$\forall s,t>0, \mathbb{P}(E>t+s|E>t)=\mathbb{P}(E>s)$$

On pose $T_0=0$ et le top horaire de rang $n>0$ a lieu à l'instant T_n. On a $T_{n+1}-T_n=E_{n+1}$ et donc

$$T_n=\sum_{k=1}^{n} E_n$$

Pour t fixé, le nombre de tops $N(t)$ dans l'intervalle $[0,t]$ est donc caractérisé par les conditions suivantes

$$T_{N(t)}\leq t \text{ et } T_{N(t)+1}>t$$

Calcul de la loi de $N(t)$

Rappelons que $T_n\sim\gamma(n,\lambda)$ et que cette loi a pour densité la fonction $\gamma_{n,\lambda}$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R}, \gamma_{n,\lambda}(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda.t}1\!\!1_{\{t\geq 0\}}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda.t}1\!\!1_{\{t\geq 0\}}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on a les égalités d'événements, prouvant que $N(t)$ est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

$$\{N(t)\geq n\}=\{T_n\leq t\} \text{ et } \{N(t)=n\}=\{N(t)\geq n\}\setminus\{N(t)\geq n+1\}$$

Au niveau des probabilités, pour $n\geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t)\geq n) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t \tau^{n-1}e^{-\lambda.\tau}\,d\tau \\
\mathbb{P}(N(t)=n) &= \mathbb{P}(N(t)\geq n)-\mathbb{P}(N(t)\geq n+1) \\
&= \frac{\lambda^n}{n!}\int_0^t \left(n.\tau^{n-1}-\lambda.\tau^n\right)e^{-\lambda.\tau}\,d\tau \\
&= \frac{\lambda^n}{n!}\left[\tau^n.e^{-\lambda.\tau}\right]_0^t=\frac{(\lambda.t)^n}{n!}e^{-\lambda.t}
\end{aligned}$$

et une formule similaire est vraie pour $n=0$.

On a donc $N(t)\sim\mathscr{P}(\lambda.t)$ Comme

$$\mathbb{P}(N(t)\in\mathbb{N})=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda.t)^n}{n!}e^{-\lambda.t}=1$$

Il vient que $\mathbb{P}(N(t)=+\infty)=0$ et $N(t)$ est presque sûrement à valeurs entières.

Processus de POISSON : compléménts culturels.

Le processus décrit pour le son de la pluie qui tombe s'appelle un processus de POISSON.

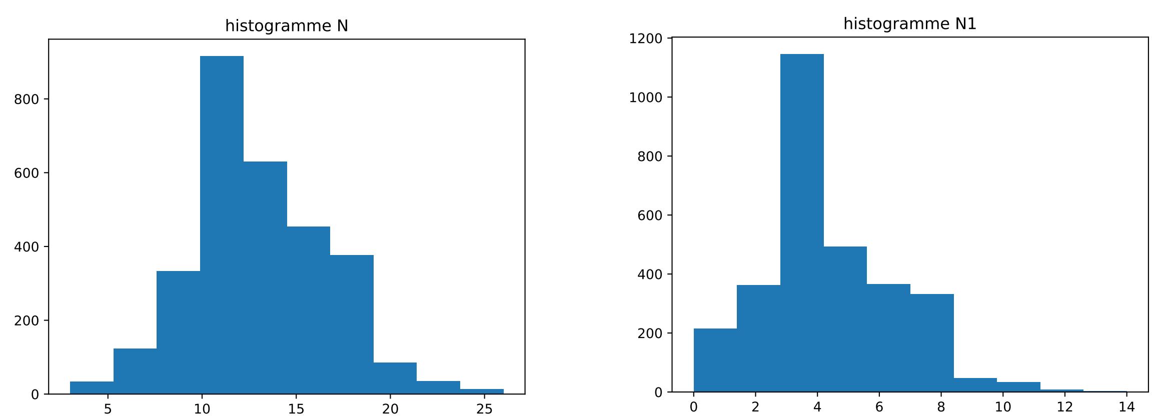
La modélisation adoptée montre que l'espérance du nombre de tops sur une durée Δt est proportionnelle à Δt. Le coefficient de proportionalité est λ, ce qui donne une méthode pour tenter de l'évaluer.

Le processus de POISSON est le processus de comptage le plus élémentaire : il intervient dans de nombreuses modélisations réelles : nombres d'accidents sur une autoroute, arrivée d'autobus à un arrêt, arrivée de clients à un guichet, ampoules qui explosent, radioactivité, etc...

C'est une source inépuisable de problèmes.

Compter des algues d'une solution « homogène » par cellules de MALASSEZ, c'est considérer que la solution est régie par un processus de POISSON *spatial* : cela implique que la quantité d'algues contenue dans un volume V prélevé suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda = c.V$, *i.e.* proportionnel au volume prélevé où c est la concentration de la solution.

Utiliser le script `processus-poisson.py`. Ce script montre comment simuler un processus de POISSON et exhiber quelques statistiques issues de cette simulation. Les histogrammes présentés en figures 4a et 4b en sont issus. Noter que pour simuler une variable de POISSON $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, on peut d'un point de vue pratique, simuler $X \sim \mathscr{B}\left(\mathscr{N}, \frac{\lambda}{\mathscr{N}}\right)$ avec $\mathscr{N}$ « grand »..



(a) Histogramme du nombre de points dans l'intervalle $[0,1]$, suivant une loi de POISSON de paramètre λ.

(b) Histogramme du nombre de points dans l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, suivant une loi de POISSON de paramètre $\frac{\lambda}{3}$.

FIGURE 4 – Simulation d'un processus de POISSON d'intensité $\lambda = 13$.

Exercice 12.— On suppose que X est une v.a à valeurs entières positives telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{4}{n}\mathbb{P}(X = n-1)$$

Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 13.— Soit N une v.a. suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ fixé.

1. Quelle est la probabilité que N soit pair ? impair ? lequel des deux événements est le plus probable ?

2. Calculer, puis comparer $\mathbb{P}(N \text{ est pair} | N \geq 1)$ et $\mathbb{P}(N \text{ est impair} | N \geq 1)$.

3 Imposer une loi, la simuler

Loi d'une v.a discrète

Rappelons le contenu de la définition 13 :

La loi d'une variable discrète X prenant ses valeurs dans un ensemble dénombrable

$$\mathscr{N} = \{x_0, \ldots, x_k, \ldots\} = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$$

est la suite des nombres $p_k = \mathbb{P}(X = x_k), k \in \mathbb{N}$. Elle vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N},\, p_k \in [0,1]\,,\, \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1.$$

1. On a $\mathbb{P}(X \notin \mathscr{N}) = 0$.
2. Réciproquement, si $\mathscr{N}$ est un ensemble dénombrable, X une v.a. telle que $\sum_{x\in\mathscr{N}} \mathbb{P}(X = x) = 1$ alors $\mathbb{P}(X \notin \mathscr{N}) = 0$ et on peut considérer que X est à valeurs dans $\mathscr{N}$.

Cas particuliers

1. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa loi est donnée par la famille de nombres p_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
2. Si X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, sa loi est donnée par la famille de nombres p_n définie par $\forall n \in \mathbb{Z}, p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
3. Si $Z = (X,Y)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, sa loi est donnée par la famille de nombres

$$p_{mn} = \mathbb{P}(Z = (m,n)) = \mathbb{P}(X = m, Y = n), (m,n) \in \mathbb{N}^2$$

On a (commenter !)

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} p_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{mn}\right) = 1$$

3.1 Existence de variables ayant une loi donnée

Proposition 20. *Supposons qu'il existe une variable U uniformément distribuée sur $[0,1]$. Soit*

— $\mathscr{N} = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ *un ensemble dénombrable et*

— $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}, p_k \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$,

alors il existe une v.a X à valeurs dans $\mathscr{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$$

Démonstration. Construisons d'abord une variable aléatoire K à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(K = k) = p_k$.

Considérons les événements $\Omega_k = \{\sum_{\ell=0}^{k-1} p_\ell \leq U < \sum_{\ell=0}^{k} p_\ell\}$. Ces événements sont disjoints, on a $\mathbb{P}(\Omega_k) = p_k$ et donc, par l'axiome de σ-additivité,

$$\mathbb{P}(\cup_{k=0}^{+\infty}\Omega_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

Si $\mathscr{Z} = \overline{\cup_{k=0}^{+\infty}\Omega_k}$, $\mathbb{P}(\mathscr{Z}) = 0$. Posons $K = k$ sur Ω_k, $K = 0$ sur $\mathscr{Z}$, on a alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \{K = k\} = \Omega_k \text{ et } \{K = 0\} = \Omega_0 \cup \mathscr{Z}$$

K est une v.a à valeurs entières et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(K = k) = p_k$. Il reste à définir X par $X = x_k$ sur $\{K = k\}$ pour conclure. □

Exercice 14.— On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \frac{a}{k^2}$.
1. Déterminer a pour que $p = (p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2. On considère X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant pour loi p. X admet-elle une espérance ?

Exercice 15.— On admet que pour tout $x \in]0,1[$, $\sum_{n=1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
1. Déterminer $a > 0$ pour que $(p_k = \frac{a}{k.2^k}, k \in \mathbb{N}^*)$ soit la loi d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer, si elles existent, variance et espérance de X.

Un exemple à valeurs $\mathbb{N}^2$

Exercice 16.— Montrer qu'en choisissant correctement $\alpha > 0$, il existe une v.a. X à valeurs $\mathbb{N}^2$ telle que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = (m,n)) = \alpha \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)}$

On donne les décompositions :

1. Pour $m \geq 0$, $n \geq 0$, $\frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)} = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{m+n+1} - \frac{1}{m+n+2}\right)$
2. $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

Exercice 17.— Soit $\lambda > 0$ et X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = a.\lambda^{i+j}\frac{(i+j)!}{i!j!}$$

pour une certaine constante $a > 0$. Donner une CNS sur λ pour que ceci soit possible et donner la valeur de a

3.2 Simulation informatique de variables discrètes

La méthode de construction d'une v.a. discrète à loi imposée est une proche variante des méthodes que nous avons utilisées pour simuler des variables discrètes prenant un nombre fini de valeurs ou des variables à densité. On se base sur l'existence d'une v.a. U uniforme sur $[0,1]$ que l'on corrige à l'aide des fonctions de répartition Cette méthode s'implémente en machine. On peut aussi utiliser les fonctions présentes dans le module `scipy.stats` qui donne directement distribution, fonction de répartition et variables aléatoires suivant une loi imposée classique. Utiliser le script `simulation-discretes-infinies.py`.

Fonction de répartition

Supposons que X soit à valeurs $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, rappelons que la fonction de répartition d'une v.a. réelle X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Comme $1\!\!1_{\{X \leq x\}} = h(X)$ avec $h(.) = 1\!\!1_{\{. \leq x\}}$, on a donc

$$F_X(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1\!\!1_{\{n \leq x\}} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n\in\mathbb{N}, n\leq x} \mathbb{P}(X = n)$$

F_X est donc nul sur $]-\infty, 0[$ et est constante sur chacun des intervalles $I_k =]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercices

1. Dessiner le graphe de la fonction de répartition d'une variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Idem pour une loi de POISSON. Savoir faire ces choses en Python rapidement.
2. Que vaut la dérivée d'une telle fonction de répartition ? Quelle est la différence avec la f.r. d'une variable à densité ?
3. Quelle formule si X à valeurs $\mathbb{Z}$?

Exercice 18.— On considère $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des capitaux dans le problème de la ruine du joueur décrit dans la partie 2.2.1, et, en se donnant K comme seuil de gain ou perte maximal, la suite $(C_n^s)_{n\in\mathbb{N}}$ décrite par la chaine de MARKOV de matrice M.

Soit T l'instant d'arrêt du jeu, *i.e.*

$$T = \begin{cases} +\infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, C_n \notin \{-K, +K\} \\ \min\{n \in \mathbb{N}^*, C_n \in \{-K, +K\}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que $C_0 = k_0$ un capital donné.
1. Montrer que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(C_n^s = K) + \mathbb{P}(C_n^s = -K)$ et exprimer cette quantité en fonction de M^n.
2. Proposer une procédure permettant de calculer informatiquement la fonction de répartition de T. Pouvez vous l'implémenter dans le script `ruine-joueur.py` ?

Représentations graphiques : Géométrique

Pour simuler une v.a. géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre p, on peut

— utiliser une variable exponentielle. On a, si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ alors

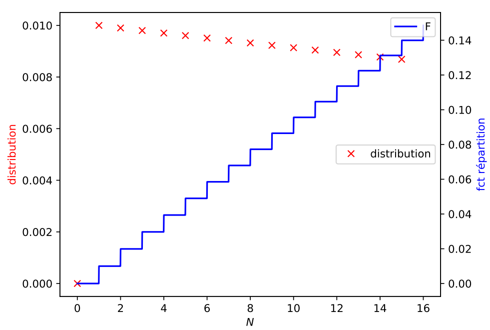
$$G = \lfloor X \rfloor \sim \mathscr{G}(\mathbb{N}, p) \text{ et } G' = \lfloor X \rfloor + 1 \sim \mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$$

où $p = 1 - e^{-\lambda}$, *i.e.* $\lambda = \ln \frac{1}{1-p}$ et $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

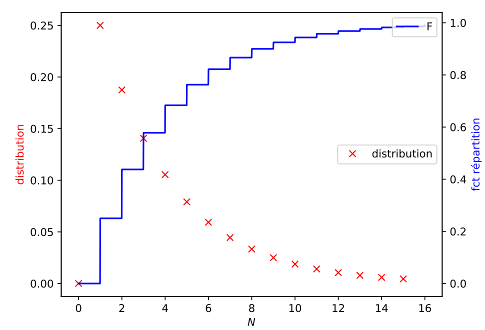
— Soit simuler le Processus d'attente du premier succès, *i.e.* tirer des v.a. de ancetreBernoulli indépendantes de paramètre p et arrêter le décompte dès que l'on obtient la valeur 1.

Remarquons que la première méthode est essentiellement une variation de la méthode présentée dans le script. La fonction partie entière « trouve » le plus grand entier inférieur à son argument.

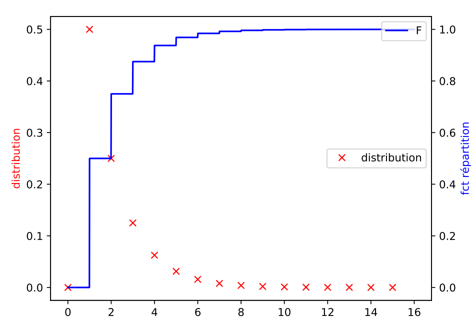
Voir les graphiques en Figs. 5a, 5b, 5c et 5d.



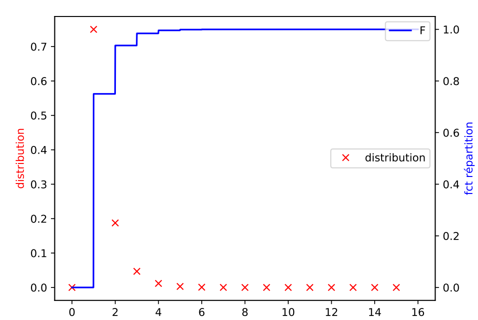
(a) Distribution géometrique, $p = 0.01$



(b) Distribution géometrique, $p = 0.25$



(c) Distribution géometrique, $p = 0.5$



(d) Distribution géometrique, $p = 0.75$

FIGURE 5 – Distributions géométriques

Représentations graphiques : POISSON

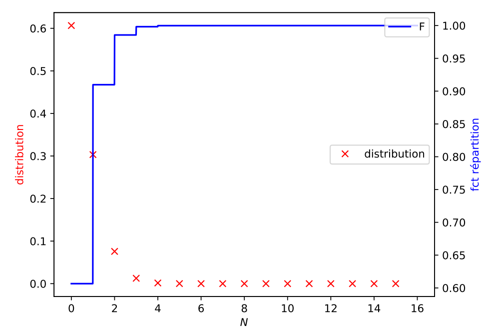
Pour simuler une v.a. de POISSON de paramètre $\lambda > 0$, on peut

— Soit calculer et « inverser » la fonction de répartition ;

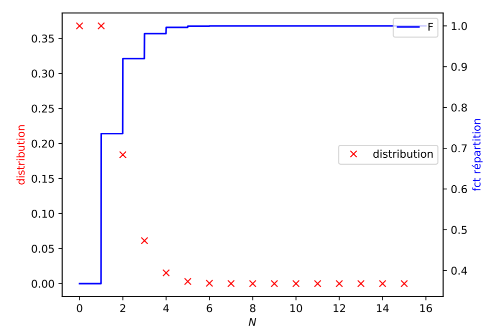
— Soit simuler un Processus de POISSON, *i.e.* sommer des variables exponentielles de paramètre λ et arrêter le décompte dès que l'on dépasse la valeur 1.

— Soit utiliser l'approximation Binomiale/POISSON, *i.e.* sommer N variables de BERNOULLI indépendantes de paramètre $p = \frac{\lambda}{N}$ avec N grand.

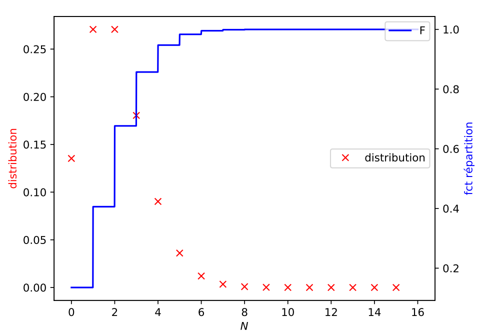
Voir les graphiques en Figs. 6a, 6b, 6c et 6d.



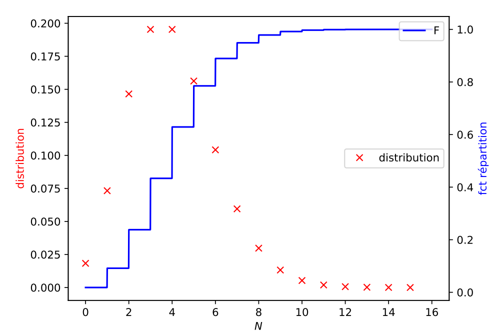
(a) $\lambda = \frac{1}{2}$



(b) $\lambda = 1$



(c) $\lambda = 2$



(d) $\lambda = 4$

FIGURE 6 – Distributions de POISSON.

4 Suites de v.a. indépendantes

Position du problème

Dans la partie 2, on a considéré des suites de variables indépendantes suivant soit chacune une loi de BERNOULLI (expérience de BERNOULLI), soit chacune une loi exponentielle (processus de POISSON), soit des lois imposées par une certaine matrice de transition (pour une chaine de MARKOV, on a besoin d'une suite infinie indexée par $\mathbb{N}$ de variables en chaque sommet du graphe.).

Une telle chose est-elle possible ?

Tourné autrement, peut-on trouver un $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel de telles familles de v.a définies existent ? Le point philosophique est d'affirmer que tous les calculs effectués jusqu'à présent s'inscrivent dans le cadre théorique imposé et sont donc corrects.

Existence de familles infinies de v.a. indépendantes

Théorème 21.
1. *S'il existe une v.a U uniformément distribuée sur $[0,1]$, il existe une famille dénombrable de variables de* BERNOULLI *de paramètre $p = \frac{1}{2}$.*
2. *S'il existe une famille dénombrable de variables de* BERNOULLI *de paramètre $p = \frac{1}{2}$, il existe une famille dénombrable de v.a (U_n)* indépendantes*, uniformément distribuées sur $[0,1]$.*
3. *S'il existe une v.a U uniformément distribuée sur $[0,1]$, et si $(\mathscr{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de lois de v.a réelles alors il existe une famille de v.a. réelles $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$* indépendante(s) *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \sim \mathscr{L}_n$$

Eléments de construction

1. Connaissant une v.a $U \sim \mathscr{U}_{[0,1]}$, on peut lui associer la suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ où X_n désigne le n-ième chiffre dans le développement binaire de U. Cette suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante et chaque $X_n \sim \mathscr{B}(\frac{1}{2})$.
2. $(\mathbb{N}^*)^2$ est dénombrable infini. On peut supposer que la suite de v.a donnée est numérotée par cet ensemble. $(X_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{X_{nm}}{2^m}$$

   $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante et uniformément distribuée.
3. Pour le dernier point, partant de U, on construit X_{nm}, puis U_n puis Y_n en suivant une vieille recette [9].

9. $Y_n = F_n^{-1}(U_n)$ où F_n est la fonction de répartition associée à la loi $\mathscr{L}_n$ et F_n^{-1} la fonction des quantiles associée.

5 Couples de variables discrètes

5.1 Généralités

La formule de transfert, espérances

Nous avons déjà vu en exemple (exercice 16) de tels couples à valeurs dans $\mathbb{N}^2$. Nous avons notamment montré l'existence d'une v.a. X à valeurs $\mathbb{N}^2$ telle que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X=(m,n)) = \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)}$.

Résumons ce qui a été dit à ce moment, étant donné une suite, doublement indexée $(p_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ telle que

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, p_{mn} \geq 0 \text{ et } \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} p_{mn} = 1,$$

on est en mesure de construire une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ telle que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X=(m,n)) = p_{mn}$.

On peut poser $X = (X_1, X_2)$ où X_1, X_2 sont deux v.a. à valeurs entières.

On peut tenter de calculer les espérances de chacune de ces variables à valeurs entières : on a, par la formule de transfert, sous réserve de convergence absolue de chacune des séries

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} m.p_{mn}, \, \mathbb{E}(X_2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} n.p_{mn}$$

Dans le cas de notre exemple, on a, pourvu que la série converge

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_2+2) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{n+2}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)} \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)} \end{aligned}$$

et on montre que ceci diverge : X_2 n'est pas intégrable. De façon plus élémentaire X_1 n'est pas intégrable non plus.

Variance/covariance d'un couple discret

De manière analogue, on peut calculer les moments d'ordre 2 de X_1 et X_2. On a

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} m^2.p_{mn}, \, \mathbb{E}(X_2^2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} n^2.p_{mn}$$

Exemples.

Si $\mathbb{E}(X_1^2)$ est fini, on dit que X_1 est de carré intégrable. X_1 est intégrable (pourquoi ?) et on définit sa variance par

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2$$

Si $\mathbb{E}(X_1^2)$ et $\mathbb{E}(X_2^2)$ sont finis, X_1 et X_2 sont de carré intégrable et leur covariance est bien définie. On a

$$\mathbb{E}(X_1.X_2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} m.n.p_{mn}$$

et

$$\mathbb{C}ov(X_1,X_2) = \mathbb{E}(X_1.X_2) - \mathbb{E}(X_1).\mathbb{E}(X_2)$$

Exemples.

5.1.1 Marginales

Etant donné un couple aléatoire à valeurs $\mathbb{N}^2$, $X = (X_1, X_2)$ peut-on retrouver les lois de X_1 de X_2 à partir de celle du couple ?

Proposition-Définition 22. *Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, $p_{mn} = \mathbb{P}(X = (m,n))$ alors*

1. *La loi de X_1 est donnée par $\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_1 = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{mn}$*
2. *La loi de X_2 est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_2 = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{mn}$*

Ces deux lois sont appelées les lois marginales de X.

Exemple. Reprenons le vecteur aléatoire à valeurs $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée dans l'exercice 16 :

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (m,n)) = p_{mn} = \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)}$$

On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = m, X_2 = n) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)}$$

Cette série est convergente, peut-on simplifier son expression ?

1. Pour $m = 0$, on a $\frac{1}{(n+1)(n+2)^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2}^2$ et donc $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$
2. Pour $m = 1$, on a $\frac{1}{(n+3)(n+2)^2} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}^2$ et donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$
3. Pour $m > 1$, on a

$$\frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{m+n+1}\right) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+n+2} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Par télescopage, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{m+n+1}\right) = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{m+n+2} - \frac{1}{n+2}\right) = -(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1})$$

et, tous calculs faits,

$$\mathbb{P}(X_1 = m) = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\frac{1}{m(m-1)} - \frac{2}{m^2-1}$$

5.1.2 Indépendance

Proposition 23. *Soit $X=(X_1,X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si*

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X=(m,n))=\mathbb{P}(X_1=m)\mathbb{P}(X_2=n)$$

Remarque : Etant donnée la loi de X, $(p_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, on peut calculer la première et la deuxième marginales : $(p^1_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(p^2_n)_{n\in\mathbb{N}}$. X_1 et X_2 sont indépendantes ssi

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ p_{mn}=p^1_m p^2_n$$

Dans notre exemple, celui de l'exercice 16, les deux composantes de X ne sont pas indépendantes.

5.2 Loi de la somme

5.2.1 Loi de la somme

Proposition 24. *Si X_1,X_2, à valeurs $\mathbb{N}$ sont indépendantes, alors la loi de $Y=X_1+X_2$ est donnée par*

$$\forall k\in\mathbb{N}, \mathbb{P}(Y=k)=\sum_{\ell=0}^{k}\mathbb{P}(X_1=\ell).\mathbb{P}(X_2=k-\ell)$$

Exemples. Cas à valeurs $\mathbb{Z}$.

5.2.2 Somme de deux v.a indépendantes géométriques, différence.

Soient X, Y deux v.a indépendantes, géométriques sur $\mathbb{N}$ de paramétres p et r. On pose $q=1-p$, $s=1-r$.

Calculons la loi de $X+Y$. On a, pour $n\in\mathbb{N}$, si $q\neq s$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k)=p.r.\sum_{k=0}^{n}q^k.s^{n-k}\\ &= p.r.\frac{q^n-s^n}{q-s}\end{aligned}$$

Ce n'est pas un résultat à retenir ! Si par contre $q=s$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k)=p^2.\sum_{k=0}^{n}q^k.q^{n-k}\\ &= p^2.(n+1)q^n\end{aligned}$$

Cette loi porte un nom, il s'agit de la loi Binômiale Négative sur $\mathbb{N}$ de paramètres 2 et p. On s'intéresse brièvement à la loi de $D=X-Y$. D est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, la formule de convolution vue ne fonctionne pas directement et il faut refaire le raisonnement. On a, pour $\delta\in\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(D=\delta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(X=n \text{ et } Y=n-\delta)=p^2\sum_{n=0}^{+\infty}q^n.q^{n-\delta}\,\mathbb{1}_{\{n-\delta\geq 0\}}$$

1. Si $\delta\geq 0$, on a $\mathbb{P}(D=\delta)=p^2\sum_{n=\delta}^{+\infty}q^{2n}.q^{-\delta}=\frac{p^2}{1-q^2}q^{\delta}$
2. Si $\delta\leq 0$, on a $\mathbb{P}(D=\delta)=p^2\sum_{n=0}^{+\infty}q^{2n}.q^{-\delta}=\frac{p^2}{1-q^2}q^{-\delta}$

Graphe ?

5.2.3 Somme de deux v.a POISSON indépendantes.

Proposition 25. *Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, X et Y sont indépendantes alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$,*

La démonstration est une simple application de la formule précédente et de la formule du binôme.

Exercice 19.—
Soit Y une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$ avec

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(Y=+1) = \mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{4}.$$

Soit X une v.a. réelle telle que X admet une espérance et une variance et X et Y sont indépendantes.
On pose $Z = X+Y$.
1. Exprimer l'espérance et la variance de Z en fonction de celles de X.
2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donner la loi de Z. Quelle est la probabilité de l'événement « Z est pair » ?
3. On suppose que X suit une exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner la fonction de répartition de Z. Montrer que Z est à densité.

Exercice 20.-⋆- Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la distribution de probabilité d'une certaine variable N à valeurs $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice P_N de N par la formule

$$\forall x \in]-1,+1[, P_N(x) = \mathbb{E}(x^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n.x^n$$

1. Montrer que P_N est toujours bien définie, i.e. que la série de la définition est (absolument) convergente pour tout $x \in]-1,+1[$.
2. Déterminer la fonction génératrice d'une loi géométrique sur [10] $\mathbb{N}$, de paramètre p.
3. Déterminer la fonction génératrice d'une loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$.
4. On suppose N_1 et N_2 deux v.a. à valeurs entières indépendantes. Montrer que la fonction génératrice de N_1+N_2 est le produit des fonctions génératrices de N_1 et N_2.
5. En admettant que la fonction génératrice caractérise la loi d'une variable à valeurs entières montrer que la somme de deux variables de POISSON, indépendantes, de paramètres respectifs λ et μ est elle-même une variable de POISSON, de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 21.— On rappelle que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, prenant un nombre fini de valeurs, le polynôme générateur de la loi de X est défini [11] par

$$P_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=n)t^n$$

1. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un suite de variables de BERNOULLI indépendantes de paramètre p, N une variable aléatoire indépendante des précédentes prenant un nombre fini de valeurs entières.
On pose $Z = \sum_{n=1}^{N} X_n$.
En admettant que Z est une variable aléatoire, calculer son polynôme générateur en fonction de ceux de X_1 et de N. Déterminer sa loi. Déterminer espérance et variance de Z en fonction de celles de N.
2. Comment traiter les questions précédentes si N suit une loi géométrique de paramètre p ? une loi de POISSON de paramètre α ?

10. Terminologie devenue hors-programme, $p_n = p.q^n, \forall n \in \mathbb{N}$
11. cette somme comporte un nombre fini de termes non nuls

Exercice 22.— Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que X suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$. On pose à l'habitude $q = 1-p$.

On pose $Z = \begin{cases} X-Y & \text{si } X > Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer la loi de Z en sommant sur les valeurs possibles de X. La quantité $r = \mathbb{E}(q^Y)$ joue un rôle crucial et doit intervenir dans la(les) formule(s) finale(s).

Un exemple où les deux v.a ne sont pas indépendantes

Supposons $X = (M,N)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (m,n)) = \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)(n+3)}$$

Quelle est la loi de $S = M+N$? On a, pour $s \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=s) &= \sum_{m+n=s} \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \sum_{n=0}^{s} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s+3}\right)
\end{aligned}$$

Somme de k v.a indépendantes géométriques

On montre par récurrence que la loi de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ où $(X_\ell)_{1\leq \ell \leq k}$ sont indépendantes, géométriques de paramètre p sur $\mathbb{N}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(S_k = n) = p^k \binom{n+k-1}{n} q^n$$

S_k suit la loi Binomiale négative de paramètres k et p.

Comment démontrer cette formule ? Une récurrence ! (Il faut utiliser, pour gérer les coefficients binomiaux, la formule de VANDERMONDE qui utilise la formule du triangle PASCAL).

Comment trouver cette loi ? Fonction génératrice ! (c'est hors programme)

$S_1 + 1$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$. C'est la loi du rang du premier succès lors d'une suite d'épreuves de BERNOULLI.

Loi du rang du k-ième succès

On montre par récurrence sur k que la loi de R_k, le rang du k-ième succès est la loi de $S_k + k$. Posons $\Sigma_k = R_k - k$. On a, pour $n \geq \ell \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{k+1} = n+k+1 | R_k = \ell + k) &= p.q^{n-\ell} \text{ pourquoi si } n < \ell\,? \\
\mathbb{P}(\Sigma_{k+1} = n | \Sigma_k = \ell) &= p.q^{n-\ell} \\
\mathbb{P}(\Sigma_{k+1} = n) &= \sum_{\ell=0}^{n} p.q^{n-\ell}\mathbb{P}(\Sigma_k = \ell)
\end{aligned}$$

Σ_{k+1} a donc pour loi la loi de la somme de Σ_k et d'une v.a. géométrique sur $\mathbb{N}$ indépendante de paramètre p.

Par hyp. de rec Σ_k a même loi que S_k et donc Σ_{k+1} a même loi que S_{k+1}.

Exercice 23.— On suppose que $(G_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}$.

1. On pose $T_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} G_n$.

1.a. Déterminer espérance et variance de T_n.

1.b. En écrivant que $\{G_1 + G_2 = n\} = \cup_{k=0}^{n}\{G_1 = k \text{ et } G_2 = n-k\}$, déterminer la loi de T_2. Quelle(s) formule(s) cela vous rappelle-t-il ?

1.c. De même, déterminer la loi de T_3.

2. Déterminer la loi de T_n, pour chaque n. On pourra procéder par récurrence et admettre la relation [12]

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+p)!}{k!p!} = \frac{(n+p+1)!}{n!(p+1)!}.$$

Exercice 24.— Une urne contient des jetons numérotés de 1 à k ($k > 2$) en proportion p_j ($p_j \in]0,1[$, la proportion de jetons j).

On effectue n tirages avec remise.

1. Déterminer la loi de N_i =« nombre de jetons numéros i tirés ».

2.a. Pour $i \leq j$, déterminer la loi de $N_i + N_j$, son espérance, sa variance.

2.b. Calculer $\mathbb{C}ov(N_i, N_j)$

Exercice 25.— Soit (X,Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = n \cap Y = m) = \frac{k}{(n+m+1)!}$$

où k est une constante.

1. Déterminer k pour que ce soit bien une loi conjointe.

2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Loi de $Z = X+Y$? $\mathbb{E}(Z)$?

5.3 Lois conditionnelles

Lois conditionnelles

Si $X = (X_1, X_2)$, on peut calculer la première marginale et ensuite calculer la la loi de X_2 sachant X_1.

Résumons : Si $(p_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est la loi de X, $p_m^1 = \mathbb{P}(X_1 = m) = \sum_n p_{mn}$. On a alors, pour m tel que $\mathbb{P}(X_1 = m) > 0$ que

$$\mathbb{P}(X_2 = n | X_1 = m) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(X_1 = m \text{ et } X_2 = n)}{\mathbb{P}(X_1 = m)} = \frac{p_{mn}}{\sum_n p_{mn}}$$

A m fixé, la suite $(\mathbb{P}(X_2 = n|X_1 = m))_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = m$.

Il est clair que l'on peut spécifier la loi d'un couple $X = (X_1, X_2)$ en donnant

1. La loi de X_1 : $(\mathbb{P}(X_1 = m))_{m\in\mathbb{N}} = (q_m)_{m\in\mathbb{N}}$,
2. La loi de X_2 sachant X_1 : $(\mathbb{P}(X_2 = n|X_1 = m))_{m,n\in\mathbb{N}} = (r_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$,

La loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (m,n)) = q_m.r_{mn}$$

Exemples.

12. Pour la démontrer : dériver n fois $(1-x)^{-(p+2)} = (1-x)^{-(p+1)}.(1-x)^{-1}$ directement et en utilisant la formule de LEIBNIZ, hors programme maintenant

Exercice 26.— Soit $p \in]0,1[$, $\lambda > 0$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = n)$ est la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n,p)$.
1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer, pour $m \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $(X = m)$. Comment qualifier la loi de $Y - m$ conditionnelle à $(X = m)$?

Exercice 27.— On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de BERNOULLI indépendantes, de probabilité de succcès $p \in]0,1[$. On pose, à l'habitude $q = 1 - p$.
1. Soit T_1 le rang du premier succès, T_2 le rang du deuxième succès, *i.e.*

$$T_1 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\} \text{ et } T_2 = \min\{n > T_1, X_n = 1\}$$

2. Rappeler la loi de T_1. (cours).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi conditionnelle de T_2 sachant $T_1 = n$? En déduire la loi du couple (T_1,T_2) puis la loi de T_2.
4. Donner la covariance de ce couple ainsi que son coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 28.— Le jour du premier de l'an, le nombre de personnes N hospitalisées pour section des veines du poignet suite à ouverture d'huîtres suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda = 100$. Les constatations des praticiens sur 100 ans indiquent que, sachant qu'il y a $N = n$ victimes, le nombre F de femmes victimes suit une loi binômiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $p = 0.25$. On note H le nombre d'hommes.
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de H sachant $(N = n)$.
2. Déterminer les lois de H et F, donner leurs espérances et leurs variances.
3. H et F sont elles indépendantes ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes ? Donner le résultat sous forme d'une somme.

Exercice 29.— La mémoire d'un ordinateur est composée de micro-interrupteurs, les « bits » qui peuvent être ouverts (bit à 0) ou fermés (bit à 1), chacun indépendamment des autres.

Un bit est un faux 0 s'il est à 0 alors qu'il devrait être à 1, c'est un faux 1 s'il est à 1 alors qu'il devrait être à 0, Cette situation survient car sur la quantité (quelques milliards) de bits, certains sont défectueux.

On suppose que sur une journée, le nombre de faux 0 (resp. le nombre de faux 1) suit une loi de POISSON de paramètre λ_0 (resp λ_1).
1. Quelle est la loi du nombre total d'erreurs ?
2. Pour un entier n, sachant qu'il y a n erreurs, quelle est la loi du nombre de faux 0 ?

6 Exercices supplémentaires

Exercice 30.— On dispose d'une urne contenant une proportion p de boules blanches et une proportion $1 - p$ de boules noires. On effectue un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ définie par

$\{X = n\}$ = « On tire pour la première fois une boule blanche au tirage $n - 1$ et une boule noire au tirage n »

Déterminer, par exemple en conditionnant sur le rang de la première boule blanche, la loi de X ainsi que son espérance.

Exercice 31.— Soient X et Y des v.a. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de probabilité de succès $p \in]0,1[$. X est donc une v.a. réelle à densité et Y une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On considère la v.a. $Z = \frac{X}{Y}$.

1. Donner une formule pour F_Z la fonction de répartition de Z et montrer que Z est une v.a. réelle à densité f_Z.

2. On pose pour $x \in [0,+\infty[$,

$$g(x) = \int_0^x t f_Z(t)\,dt \text{ et } h(x) = \int_0^x (1 - F_Z(t))\,dt$$

Montrer que pour $x > 0$, on a

$$g(x) = x(F_Z(x) - 1) + h(x)$$

et en déduire que Z admet une espérance que l'on calculera.

3. Donner $\mathbb{C}ov(Z,Y)$.

Exercice 32.— On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce une matrice de transition ? Schématiser états (on le numérotera par les indices de ligne/colonne de la matrice M) et probabilités de transition. Vérifier que l'état 3 est un état cimétière [13].

2. Une particule change d'état d'un instant n sur le suivant $n+1$ en respectant les probabilités de transition données par la matrice M. On note X_n sa position à l'instant $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* on note $(X_n = k)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1,2,3\}$ l'événement « à l'instant n, la particule est dans l'état k ». On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n.U_0$$

3. On note T le premier instant où la particule passe dans l'état 3, *i.e.*

$$(T = n) = (X_n = 3) \cap \bigcap_{\ell < n} (X_\ell \neq 3)$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(T > n) = (X_n \neq 3)$$

et

$$\mathbb{P}(T > n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.M^n.U_0$$

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.(I_3 - M).M^{n-1}.U_0$$

13. Un état est dit cimetière à partir du moment où la probabilité d'en partir est nulle

5. A l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de M et une matrice P diagonalisant M.
6. Montrer que T admet une espérance et donner, en fonction des valeurs propres de M, de P et de U_0 une formule donnant $\mathbb{E}(T)$.
7. En supposant que $U_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, donner, en utilisant Python, une estimation de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 33.— On fait tourner une grande boule contenant des paillettes roses et bleues bien mélangées en proportion $r = \frac{1}{3}$ de pailletes roses et $b = 1 - r$ de paillettes bleues. Cela déclenche après quelques tours une sortie de N paillettes. On compte ensuite le nombre R de paillettes roses et le nombre B de paillettes bleues. On suppose que N suit une loi discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N > n) \neq 0$. On note $u_n = n!\mathbb{P}(N = n)$.
1. Donner la loi conditionnelle de B sachant $\{N = n\}$.
2. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(B = h) = \frac{b^h}{h!} \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{r^{n-h}}{(n-h)!} u_n$$

Donner une formule similaire pour la loi de R, *i.e.* $\mathbb{P}(R = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. De même, après avoir donné la loi conditionnelle du couple (B,R) sachant $N = n$, calculer la loi du couple (B,R).
4. On suppose que $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Montrer qu'alors $B \sim \mathscr{P}(\lambda.b)$, $R \sim \mathscr{P}(\lambda.r)$ et que B et R sont indépendantes.
5. On suppose que B et R sont indépendantes.
On pose, pour h,k deux entiers

$$\phi(h) = \sum_{n=h}^{+\infty} \frac{r^{n-h}}{(n-h)!} u_n \text{ et } \psi(k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} u_n$$

5.a. Montrer que pour tous $(h,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\phi(h).\psi(k) = u_{h+k}$$

5.b. Vérfier que $\phi(h) > 0$ et, en prenant la relation précédente pour $k = 0$ et $k = 1$, que u_n est une suite géométrique de raison $\lambda > 0$.
5.c. Quelle est la loi de N ? Quelles sont les lois de B et R ?