Corrections choisies 08

Algèbre linéaire. Généralités

Correction Ex.–29 Soit le $\mathbb{R}$-ev $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u: E\to\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f\in E,\quad \begin{array}{rccl} u(f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x)-\cos(x).f(x)\end{array}$$

1. Tout d'abord l'application u est bien définie. En effet, si f est une fonction de classe$\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors, sa dérivée existe et la fonction $x\mapsto f'(x)-\cos(x).f(x)$ est bien une fonction, à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}$, *i.e.* un élement de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Montrons que u est linéaire. Soient $f,g\in E$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda.f+\mu.g) & = & x\mapsto \big((\lambda.f+\mu.g)'(x)-\cos(x).(\lambda.f+\mu.g)(x)\big) \\ \text{(lin. dérivation, def. op.)} & = & x\mapsto \big(\lambda.f'(x)+\mu.g'(x)-\cos(x).(\lambda.f(x)+\mu.g(x))\big) \\ \text{(dévpt., réorganisation)} & = & x\mapsto \big(\lambda.f'(x)-\cos(x).\lambda.f(x)+\mu.g'(x)-\cos(x).\mu.g(x)\big) \\ \text{(def. op.)} & = & \lambda.\big(x\mapsto f'(x)-\cos(x).f(x)\big)+\mu.\big(g'(x)-\cos(x).g(x)\big) \\ & = & \lambda.u(f)+\mu.u(g)\end{array}$$

2. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors, sa dérivée f' existe et est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme il en est de même pour la fonction cos, par les théorèmes de stabilité par opérations algébriques (somme, produit) de l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction $x\mapsto f'(x)-\cos(x).f(x)$ est bien une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, *i.e.* un élement de E.

On a donc montré que

$$\forall f\in E, u(f)\in E$$

On peut donc restreindre l'ensmeble d'arrivée de l'application u à l'espace E, *i.e.* $u: E\to E$. La linéarité de u est conservée et donc u définit un endomorphisme de E.

3. On a

$$\operatorname{Ker} u=\{f\in E, u(f)=0\}$$

Une fonction f est dans le noyau de u si et seulement si elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)-\cos x.f(x)=0$$

Le noyau de u est donc l'ensemble des fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

On a donc (en utilisant la technique de résolution standard de telles équations)

$$\operatorname{Ker} u=\{f\in E, \exists\lambda\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\lambda.e^{\sin x}\}=\operatorname{Vect}\langle f_1\rangle$$

où l'on a posé $f_1: x\mapsto e^{\sin x}$.

4. Pour montrer que $u: E\to E$ est surjective, il suffit de montrer que pour toute $g\in E$, il existe $f\in E$ telle que

$$u(f)=g$$

i.e.

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)-\cos x.f(x)=g(x) \qquad (E_g)$$

Soit $g\in E$. Il s'agit de montrer que cette équation différentielle linéaire du premier ordre (non homogène si g n'est pasla fonction nulle) admet au moins une solution f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de mettre en oeuvre la méthode de la variation de la constante et de vérifier que la solution obtenue est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

A une fonction f, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction λ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}, \lambda(x)=\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

Cette fonction λ est bien définie, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car f et f_1 le sont et f_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a

$$f = \lambda.f_1 \text{ et } f' = \lambda'.f_1 + \lambda.f_1'$$

La fonction f est solution de E_g si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) - \cos x.f(x) = g(x)$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \lambda'(x).f_1(x) = g(x)$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \lambda'(x) = \frac{g(x)}{f_1(x)}$$

La résolution de l'équation (E_g) est donc équivalente à la résolution de cette équation, *i.e.* à l'existence d'une primitive de la fonction apparaissant dans le membre de droite.

Comme la fonction $x \mapsto \frac{g(x)}{f_1(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (quotient de telles fonctions, le dénom. ne s'annulant pas), cette équation admet une solution, λ, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction λ permet, en posant $f = \lambda.f_1$, de construire une solution $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_g).

Une remarque finale : l'endomorphisme $u : E \to E$ est surjectif, non injectif (son noyau est de dimension 1). Ce phénomène ne peut se produire si E est de dimension finie. L'espace E de toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ *n'est pas* de dimension finie.