Notes de cours 08

Algèbre linéaire. Généralités

Table des matières

1 Une structure de travail commune

1.1 Espaces vectoriels

Ce que ce cours entend développer, c'est la structure commune sous-jacente à de nombreux problèmes dit « linéaires », c'est à dire satisfaisant à un principe de superposition, autrement dit vérifiant certaines propriétés de stabilité vis à vis de la prise de « combinaisons linéaires » : systèmes linéaires à n inconnues scalaires, suites satisfaisant à une relation de récurrence linéaire, équations différentielles linéaires, etc...

Il s'agit–en mettant en exergue les propriétés communes de ces problèmes– de développer une *surcouche abstraite* de langage permettant un traitement unifié de ces problèmes. Cette unification se fait à l'aide d'un langage à forte teneur géométrique : on qualifiera les fonctions,les suites, les objets en considération, de *points* (ou *vecteurs*) d'un espace géométrique et on parlera de l'ensemble des solutions de tel ou tel problème linéaire comme d'une droite, d'un plan ou d'un espace dans lequel on peut faire de la géométrie.

Le point de départ est constitué du choix d'un ensemble de nombres $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$–le *corps des scalaires*– et d'un ensemble E, non vide, (dans les exemples, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles , ou l'ensemble $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de fonctions à valeurs réelles, si $K = \mathbb{C}$, leurs analogues complexes) que l'on munit de deux opérations

1. $+$, une opération *interne* [1] : $+ : E \times E \to E, (u,v) \mapsto u+v$.
2. ., une opération *externe* [2] : $. : \mathbb{K} \times E \to E, (\lambda,u) \mapsto \lambda.u$

Ces deux opérations permettent, étant donnés deux éléments x et y de E et deux *scalaires* [3] λ et μ, de former un élément de E, $z = \lambda.x + \mu.y$, *combinaison linéaire* de x et y avec les coefficients λ et μ.

Plus généralement, étant donnés $x_1,\dots,x_n$, n éléments de E, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des *scalaires*, on peut former [4] un élément de E,

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k,$$

l'élément z de E est *combinaison linéaire* des x_i affectés des coefficients scalaires λ_i. On s'intéresse ensuite aux objets de E possèdant une certaine propriété (P). Le point saillant est que si $x,y \in E$ vérifient (P) et si λ,μ sont deux réels alors $\lambda.x+\mu.y$ vérifie (P) [5].

Dans quelques exemples fondamentaux, montrons comment sont définies ces opérations.

1. Dans le cas de $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $x = (x_1,\dots,x_5)$, $y = (y_1,\dots,y_5)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, on définit

$$x \underbrace{+}_{\text{au sens de } \mathbb{R}^5} y := (x_1 \underbrace{+}_{+\text{au sens des réels}} y_1,\dots,x_5+y_5) \text{ et } \lambda.x := (\lambda \underbrace{.}_{.\text{au sens des réels}} x_1,\dots,\lambda.x_5)$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de x et y avec les coefficients λ et μ vaut :

$$\lambda.x+\mu.y = (\lambda.x_1+\mu.y_1,\dots,\lambda.x_5+\mu.y_5)$$

1. interne car les deux arguments de cette fonction sont du même « type » E, opération car partant d'éléments du type E, la fonction retourne un élément du même type.
2. interne car les deux arguments de cette fonction sont de « types » *a priori* différents E et $\mathbb{K}$. Le cas $E = \mathbb{K}$ n'est cependant pas exclu.
3. Les nombres dans ce contexte sont souvent appelés des scalaires, la provenance de ce terme est géométrique, évoquant la notion de changement d'échelle, de taille
4. en utilisant les règles que l'on posera dans l'axiomatique
5. On dit que la propriété (P) est stable par combinaisons linéaires.

Si (S) est un certain système linéaire **homogène** en les inconnues $(x_1,\dots,x_5)\in\mathbb{R}^5$, on remarque que la propriété (P) d'un élément $x\in\mathbb{R}^5$: « x satisfait (S) » est stable par combinaisons linéaires.

On peut généraliser les définitions d'opérations de cet exemple à un nombre d'inconnues réelles n quelconque et donc travailler avec l'ensemble $E=\mathbb{R}^n$ ou encore considérer des systèmes linéaires à n inconnues complexes et travailler avec $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $E=\mathbb{C}^n$.

2. Dans le cas de $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (ici $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, on définit

$$u \underbrace{+}_{\text{au sens des suites}} v := \left(u_n \underbrace{+}_{+\text{au sens des complexes}} v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et } \lambda.u := \left(\lambda \underbrace{.}_{.\text{au sens des complexes}} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de u et v avec les coefficients λ et μ vaut :

$$\lambda.u+\mu.v=(\lambda.u_n+\mu.v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\lambda.u_0+\mu.v_0,\dots,\dots)$$

Soient $a_0,\dots,a_{p-1}$ p nombres complexes fixés ($p\in\mathbb{N}^*$). On considère la propriété (P) d'un élément $u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: « u satisfait la récurrence (R) » où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+p}=\sum_{k=0}^{p-1} a_k.u_{n+k} \tag{R}$$

La propriété (P) est stable par combinaisons linéaires.

3. Dans le cas de $E=\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$ où I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ fixé. ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) , si $f:=(t\in I\mapsto f(t)\in\mathbb{R})$, $g=(t\in I\mapsto g(t)\in\mathbb{R}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on définit

$$f \underbrace{+}_{\text{au sens des fonctions}} g := (t\in I\mapsto f(t)+g(t)\in\mathbb{R}) \text{ et } \lambda.f:=(t\in I\mapsto\lambda.f(t)\in\mathbb{R})$$

Ce qui a pour conséquence que la combinaison linéaire de f et g avec les coefficients λ et μ vaut :

$$\forall t\in I,\, (\lambda.f+\mu.g)(t)=\lambda.f(t)+\mu.g(t)$$

Soient a_0,a_1 2 nombres réels fixés. On considère la propriété (P) d'un élément $f\in\mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$: « f satisfait l'équation différentielle (ED) » où :

$$\forall t\in I,\, f''(t)=a_1.f'(t)+a_0.f(t) \tag{ED}$$

La propriété (P) est stable par combinaisons linéaires.

Ce qu'il faut retenir c'est que l'on connait des opérations $+$ et . agissant sur les scalaires (nombres réels ou complexes). Ces opérations « primitives » servent à définir de « nouvelles » opérations, notées de la même manière, mais agissant qui sur les 5-uplets, qui sur les suites, qui sur les fonctions éléments de $\mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$. Dans chaque cas, la somme de deux objets d'un type [6] donné donne un objet du même type et la multiplication d'un *scalaire* par un objet d'un type donné donne aussi un objet du même type.

Il est crucial dans ce domaine des mathématiques (l'algèbre) plus encore que dans les autres de distinguer $f(x)$, valeur de la fonction f au point x (donné ou quantifié auparavant) et $x\mapsto f(x)$, qui *est* [7] la fonction f. On a

$$f=(x\mapsto f(x))$$

***f* *n'est pas* $f(x)$, ce sont deux objets de types différents.**

De même u_n n'est pas la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le nombre réel u_n est la valeur de la suite u à l'entier n (mal spécifié par ailleurs). u_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux objets de types différents.

6. On est prié de prendre les mots « objets » et « type » au sens informatique.
7. on peut sous-entendre le domaine de départ et le domaine d'arrivée de f pour alléger

Le langage Python peut manipuler directement des vecteurs ou des fonctions en tant qu'objets.

Listing 1 – python/AL-fonctions.py

```
"""
AL-fonctions.py : ce script pour démontrer comment faire de l'Alg. lin.
                sur les fonctions de variable float ou ndarray de float
"""
def somme_evfct(f, g) :
    """
    retourne la fonction somme des deux fonctions f et g
    """
    def s(x) :
        return f(x) + g(x)
    return s
def mult_evfct(lambada, f):
    """
    retourne la fonction produit
                            du scalaire lambada par la fonction f
    rq: lambda est un mot réservé du langage, on ne peut pas l'utiliser
    """
    def m(x) :
        return lambada*f(x)
    return m
def CL_evfct(coeff_fct) :
    """
    CV_evfct(coeff_fct) :
    retourne la fonction combinaison lineaire de la liste coeff_fct
        cette liste est une liste de couples [scalaire,fonction]
    """
    #si la liste est vide on retourne la fonction nulle
    def zero(x) :
        return 0.0*x
    result = zero
    #Pour une syntaxe plus lisible, on boucle directement sur la liste
    for lambada,f in coeff_fct :
        result = somme_evfct(result, mult_evfct(lambada, f))
    return result

#essais graphiques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
liste = [[1.0,np.sin],[2.0,np.cos]]
f = CL_evfct(liste) # on construit la fonction CL de la liste précédente
x = np.linspace(0,2*np.pi,100)
plt.plot(x, f(x), label=r'$y=f(x)$')
plt.plot(x, np.sin(x), label=r'$y=\sin(x)$')
plt.plot(x, 2*np.cos(x), label=r'$y=2\cos(x)$')
plt.legend()
plt.show()
```

On peut voir dans ce script, des fonctions Python implémentant

1. La fonction `somme_evfct(f,g)` retournant la fonction somme de deux fonctions réelles de variable réelle f et g,
2. La fonction `mult_evfct(lambada,f)` donnant la fonction produit d'une fonction réelle de variable réelle f par un scalaire réel λ.
3. La fonction `CL_evfct(liste)` donnant la fonction résultant de la combinaison linéaire de la liste de couples (scalaire,fonction) décrite par `liste`.

Définition 1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un ensemble* [8] *E, non vide, muni des opérations* [9] *$+$ et $.$ est un* $\mathbb{K}$-espace vectoriel *si les axiomes suivants sont vérifiés.*

Les axiomes de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

AXIOMATIQUE

1. Commutativité somme : $\forall x, y \in E, x+y = y+x$
2. Associativité somme [10] : $\forall x, y, z \in E$, $(x+y)+z = x+(y+z)$.
3. 0 Neutre somme : $\exists 0 \in E, \forall x \in E, x+0 = 0+x = x$
4. Existence d'opposé [11] : $\forall x \in E, \exists x' \in E, x+x' = x'+x = 0$
5. Associativité produit [12] : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $(\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x)$.
6. $1 \in \mathbb{K}$ Neutre produit : $\forall x \in E$, $1.x = x$
7. Distributivité I [13] : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = (\lambda.x)+(\mu.x)$
8. Distributivité II : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$, $\lambda.(x+y) = (\lambda.x)+(\lambda.y)$

Vocabulaire et Quelques règles de calcul

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit que $\mathbb{K}$ est le *corps* des *scalaires* de E. Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*.
2. L'élément 0 apparaissant dans la propriété *Neutre somme* est unique avec cette propriété. On le nomme le *vecteur nul*. Il ne faut pas le confondre avec le 0 réel. On le note parfois 0_E.
3. Pour chaque $x \in E$, x' vérifiant la propriété *Existence d'opposé* est unique avec cette propriété. On le note $-x$, l'*opposé* de x.
4. $0 \in \mathbb{K}$ et $0 \in E$ On a $\forall x \in E, 0.x = 0, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.0 = 0$.
5. Signes $-$ baladeurs : $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$
6. Simplification produit nul : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $\lambda.x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\lambda = 0$.
7. Simplification égalités I : Si $\lambda.x = \lambda.y$ et $\lambda \neq 0$ alors $x = y$
8. Simplification égalités II : Si $\lambda.x = \mu.x$ et $x \neq 0$ alors $\lambda = \mu$

8. plus précisémment « le triplet $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si ... »
9. $+$ interne, . externe
10. Cette propriété permet de considérer, sans parenthésage $x+y+z$ et plus généralement $x_1+x_2+\cdots+x_n$.
11. pour chaque x, il y a en fait un unique x' tel que $x'+x = x+x' = 0$, il s'appelle l'**opposé** de x, noté $-x$. Soustraire x, c'est faire la somme avec $-x$
12. Cette propriété permet de considérer, sans parenthésage $\lambda.\mu.x$. Noter les différentes significations du signe .
13. Ces propriétés sont à la base des techniques de développement, factorisation

Exemples de référence de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

1. $\mathbb{R}^n$ avec somme et multiplication par un scalaire vu en première année
2. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels comportant n lignes, p colonnes.
3. $\mathbb{R}^I$ [14] l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{R}$ où les opérations sont définies par

$$\forall t \in I,\ (f+g)(t) = f(t)+g(t),\ (\lambda.f)(t) = \lambda.(f(t))$$

   Cet exemple couvre les deux exemples précédents avec resp. $I = \{1,\dots,n\}$ et $I = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}$, l'espace des suites réelles avec $I = \mathbb{N}$, l'espace des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sur un ensemble Ω quelconque ...
4. $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X.

Exemples de référence de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

1. $\mathbb{C}^n$ avec somme et multiplication par un scalaire définis de façon similaire à $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes comportant n lignes, p colonnes.
3. $\mathbb{C}^I$, l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{C}$ où les opérations sont définies par

$$\forall t \in I,\ (f+g)(t) = f(t)+g(t),\ (\lambda.f)(t) = \lambda.(f(t))$$

   Cet exemple comporte les exemples précédents, l'espace des suites complexes, l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle, ...
4. $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en l'indéterminée X.

Cas limite

1. $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-e.v., un $\mathbb{C}$-e.v. C'est l'*espace nul*. Il ne s'y passe pas grand chose mais ressurgit à tout bout de champ.
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il est, en tant que $\mathbb{R}$-espace, *isomorphe* à $\mathbb{R}^2$.
4. Plus généralement, tout [15] $\mathbb{C}$-e.v. est un $\mathbb{R}$-e.v. en restreignant la multiplication par les scalaires à $\mathbb{R}$.

Remarques :

— Pour éviter la duplication des définitions et théorèmes, on note $\mathbb{K}$ l'un des deux *corps* de *scalaires* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Chaque théorème ou définition a donc deux lectures, celle concernant les $\mathbb{R}$-ev. et celle concernant les $\mathbb{C}$-ev.

— Si on dit sèchement dans un enoncé que E est un espace vectoriel, le corps des scalaires est sous-entendu et il est à éclaircir [16] en priorité.

14. où I est un ensemble non vide
15. On n'insistera pas sur cette subtilité.
16. Le contexte indique s'il s'agit de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

1.2 Familles de vecteurs, familles libres, familles liées

1.2.1 Combinaisons linéaires

Définition 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $(u_i)_{i\in I}$ une famille* finie *de vecteurs dans E indexée par I, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires. La* combinaison linéaire *de la famille $(u_i)_{i\in I}$ avec les coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ est le vecteur de E défini par*

$$\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i$$

Réciproquement, on dit qu'un vecteur $v\in E$ est combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$v=\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i$$

1.2.2 Stabilité par combinaisons linéaires

Proposition 3 (Une CL de CL est une CL)**.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E, $(v_j)_{j\in J}$ une famille finie de vecteurs de E, telle que chaque v_j est combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$.*

Une combinaison linéaire de la famille $(v_j)_{j\in J}$ est une combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Démonstration. L'hypothèse implique que pour chaque j, il existe une famille $(\lambda_{ij})_{i\in I}$ de scalaires telle que

$$v_j=\sum_{i\in I}\lambda_{ij}u_i$$

Soit $w=\sum_{j\in J}\mu_j.v_j$. On a alors, en appliquant les axiomes d'e.v.

$$w=\sum_{j\in J}\mu_j\left(\sum_{i\in I}\lambda_{ij}u_i\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}\lambda_{ij}\mu_j\right)u_i$$

$\square$

1.2.3 Familles libres, familles liées

Il est clair [17] que si $\mathscr{U}=(u_i)_{i\in I}$ est une famille finie de vecteurs de E quelconque et si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est la famille de scalaires nulle : $\forall i\in I$, $\lambda_i=0$ alors :

$$\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i=0.$$

La « réciproque » est en générale fausse : ce n'est pas parce que $\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i=0$ que l'on peut conclure que chaque λ_i vaut individuellement 0. Que ceci soit garanti est une propriété fondamentale que possède– ou pas– une famille de vecteurs $\mathscr{U}$. Comme c'est une propriété fondamentale, cela mérite une définition.

17. du fait que $\forall x\in E$, $0.x=0$ et que $\sum_{i\in I}0=0$

Définition 4

Soit $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E, on dit que

— la famille $\mathscr{U}$ est libre si :

$$\forall(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

— la famille $\mathscr{U}$ est liée si elle n'est pas libre, c'est à dire s'il existe une *relation linéaire non triviale* liant les u_i, *i.e.* une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que :

1. $\exists i \in I$, $\lambda_i \neq 0$ (les scalaires sont **non tous nuls**)
2. $\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0$.

Exemples :

— Une famille comportant le vecteur nul ou comportant deux vecteurs identiques est toujours liée.

— La famille vide est toujours libre, par pure convention logique.

— Une famille $\mathscr{U} = (x)$ composée d'un seul vecteur x est libre si et seulement si [18] $x \neq 0$.

— Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres :

$$\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I} \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists i \in I, \exists(\mu_j)_{j\in I\setminus\{i\}}, u_i = \sum_{j\neq i} \mu_j.u_j.$$

Proposition 5

Si $\mathscr{U}$ est une famille libre dans E, si $x \in E$ est tel que $\mathscr{U}\#\{x\}$ est liée alors x est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{U}$.

Démonstration. Exercice ! □

Exercice 1.—On considère les 5 vecteurs dans $\mathbb{C}^4$:

$$u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,4,8), u_3 = (1,3,7,15), u_4 = (1,-1,1,1), u_5 = (1,-2,4,-8).$$

1. Pourquoi la famille $\mathscr{U}_{12345} = (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ est-elle liée (sans calcul) ?
2. Résoudre le système linéaire homogène d'inconnue $(\lambda_1,\dots,\lambda_5) \in \mathbb{C}^5$ dont la matrice est composée, en colonnes, par les vecteurs $u_1,\dots,u_5$.
3. Montrer que $\mathscr{U}_{124} = (u_1,u_2,u_4)$ est libre. Que dire de la famille $\mathscr{U}_{12} = (u_1,u_2)$?
4. Montrer que $\mathscr{U}_{123}$ est liée en donnant une relation linéaire explicite entre u_1, u_2 et u_3. Que dire de la famille $\mathscr{U}_{1234} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$?
5. La famille $\mathscr{U}_{1234}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{C}^4$? Donner un argument sans calcul.
6. Répondre aux mêmes questions en remplaçant $\mathbb{C}^4$ par $\mathbb{R}^4$ (*i.e.* en remplaçant le corps de base $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Exercice 2.—Liberté de familles de suites géométriques.
1. Soient q_+, q_- deux nombres complexes et les suites $Q_+ = (q_+^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Q_- = (q_-^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (Q_-,Q_+) est libre dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $q_+ \neq q_-$.
2. Même question mais avec 3 suites géométriques.
3. (Difficile) Même question avec un nombre $d \geq 2$ de suites géométriques

18. C'est le sens de la règle de calcul supplémentaire numéro 8.

Exercice 3.—Version trigonométrique.
1. Soit $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta \neq 0$.
1.a. Montrer que les suites

$$C = (\rho^n.\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } S = (\rho^n.\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$$

forment une famille libre dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. (On pourra se ramener au cas de suites géométriques en posant $q_{\pm} = \rho.\exp(\pm\theta)$.)
1.b. Montrer que la famille (C,S) est libre dans (le $\mathbb{R}$-ev) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Mêmes questions avec ρ, θ_0, ρ_1, θ_1 : A quelles conditions la famille (C_0,S_0,C_1,S_1) est-elle libre (dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) ?

Exercice 4.—
1. Soit $q \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{N}^*$ et

$$Q_0 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, Q_1 = (n.q^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}, Q_2 = (n.(n-1)q^{n-2})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, Q_d = (n.(n-1)\dots(n-d+1).q^{n-d})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que $(Q_0,\dots,Q_d)$ est libre dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Indication:En posant D le décalage à gauche $D.[(u_n)] = (u_{n+1})$ et I l'identité des suites : $I.[(u_n)] = (u_n)$, vérifier que l'opération $D - q.I$ transforme Q_k en $k.Q_{k-1}$.
2. (Difficile) On suppose $q_-, q_+ \in \mathbb{C}$, $q_- \neq q_+$.

Montrer (par exemple par récurrence sur $d = d_+ + d_- \in \mathbb{N}$) que la famille $(Q_{0,+},\dots,Q_{d_+,+},Q_{0,-},\dots,Q_{d_-,-})$ est libre dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Indication:Utiliser le même type d'opérations $D - q.I$ que dans le cas de la question précédente

Exercice 5.—Liberté de familles de fonctions. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction prenant une infinité de valeurs. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f^k = t \mapsto f(t)^k$.

Montrer que pour tout entier n la famille $\mathscr{F}_n = (f^0, f^1, \dots, f^n)$ est libre dans $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$

Exercice 6.—Liberté de familles de fonctions exponentielles. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial.

A un $\alpha \in \mathbb{C}$, on associe la fonction $e_\alpha : I \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in I, e_\alpha(t) = \exp(\alpha.t).$$

1. On considère α_+, $\alpha_- \in \mathbb{C}$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$. Montrer que la famille $(e_{\alpha_+}, e_{\alpha_-})$ est libre dans $E = \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$.
2. On considère $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in \mathbb{C}$, tous distincts. Montrer que la famille $(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_d})$ est libre dans $E = \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$.

Indication:Penser à dériver l'équation initiale, la spécialiser, le nombre de fois qu'il faut pour que ça crache le morceau

Exercice 7.—Liberté de familles de fonctions trigonométriques. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non trivial.

A un $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, on associe les fonctions $c_\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $s_\alpha : I \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall t \in I, c_\alpha(t) = \cos(\alpha.t), s_\alpha(t) = \sin(\alpha.t).$$

1. Montrer que la famille (c_α, s_α) est libre dans le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Indication:Utiliser le fait que la famille $(e_\alpha, e_{-\alpha})$ est libre dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$.
2. On considère $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in]0,+\infty[$, tous distincts. Montrer que la famille $(c_{\alpha_1},\dots,c_{\alpha_d},s_{\alpha_1},\dots,s_{\alpha_d})$ est libre dans $E = \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

Exercice 8.—Liberté de familles de fonctions polynômes-exponentielles. Soit I comme précédemment.
A un $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, on associe la fonction $e_{\alpha,k} : I \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in I,\, e_\alpha(t) = t^k.\exp(\alpha.t).$$

1. On considère α_+, $\alpha_- \in \mathbb{C}$, $\alpha_+ \neq \alpha_-$. Montrer (par exemple par récurrence sur $d = d_+ + d_- \in \mathbb{N}$) que la famille $(e_{\alpha_+,0}, \dots, e_{\alpha_+,d_+}, e_{\alpha_-,0}, \dots, e_{\alpha_-,d_-})$ est libre dans $E = \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$.

Indication:En posant D la dérivation et I l'identité des fonctions, l'opération $D - \alpha.I$ transforme $e_{\alpha,k}$ en $k.e_{\alpha,k-1}$.

2. Extension au cas de d valeurs distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$?

Exercice 9.—Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ des nombres distincts.
1. Soient $X_1, \dots, X_d \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\forall k,\, M.X_k = \lambda_k.X_k$. On suppose que $X_1 + \dots + X_d = 0$. Montrer que les vecteurs X_k sont tous nuls.
2. On suppose que les nombres λ_k sont valeurs propres de M et que $X_1, \dots, X_d$ sont des vecteurs propres de M, X_k de vp. asssociée λ_k. Montrer que la famille $(X_1, \dots, X_d)$ est libre dans $\mathbb{C}^n$. Comparer d et n.

Exercice 10.—Liberté de familles de polynômes.
1. Dans $\mathbb{C}[X]$, on considère une famille $\mathscr{P}_d = (P_0, P_1, \dots, P_d)$ de polynômes tels que $\forall k, \deg(P_k) = k$. Montrer que cette famille est libre.
2. Que dire d'une famille de polynômes de degrés tous distincts ?

Ce résultat est un résultat de cours, utilisable directement sous la forme « Une famille de polynômes, échelonnée en degrés est libre. »

3. Monter que la famille de polynômes (P_0, P_1, P_2, P_3) est libre où

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3),\, P_1 = X(X-2)(X-3),\, P_2 = X.(X-1)(X-3),\, P_3 = X.(X-1)(X-2).$$

4. Généraliser cet exemple pour construire une famille libre de $d+1$ polynômes tous de degré d.

1.2.4 Le principe d'identification des coefficients d'une CL

Théorème 6. *Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i \in I}$ est une famille (finie) libre de vecteurs de E alors :*

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I}, (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_i \lambda_i.u_i = \sum_i \mu_i.u_i \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = \mu_i)$$

Exercice 11.—(Elément de cours sur la théorie des polynômes) Soit I une partie de $\mathbb{C}$, $d \in \mathbb{N}^*$ fixé et la famille de fonctions $\mathscr{P}_d = (p_0, \dots, p_d)$ définies sur I, à valeurs complexes (des éléments du $\mathbb{C}$-ev $E = \mathbb{C}^I$ donc) par

$$\forall k \in \{0, \dots, d\}, \forall x \in I,\, p_k(x) = x^k$$

1. Montrer que si I intervalle de $\mathbb{R}$ *non trivial* alors $\mathscr{P}_d$ est libre. En déduire le principe d'identification des coefficients ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des complexes donnés à l'avance) :

$$\big(\forall x \in I,\, (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 + \alpha x^2 + \beta.x + \gamma\big) \Leftrightarrow (\alpha = -(a+b+c) \text{ et } \beta = (ab+bc+ca) \text{ et } \gamma = -abc)$$

2. Montrer que si $I = \{-1, 0, +1\}$ et $d = 3$ alors $\mathscr{P}_d$ est liée. Donner deux expressions polynomiales à coefficients différents dont les évaluations sur tous les points de I sont identiques.
3. A quelle condition –liant I et d– la famille $\mathscr{P}_d$ est-elle libre ?

Exercice 12.—Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $T_{k,\alpha} = \frac{1}{k!}(X-\alpha)^k$.
1. Montrer que la famille $\mathscr{T}_{\alpha,d} = \left(T_{\alpha,k}\right)_{0\le k\le d}$ est une famille libre dans $\mathbb{C}[X]$
2. On note $D : P \mapsto P'$ la dérivation des polynômes. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $D(T_{\alpha,k}) = T_{\alpha,k-1}$.
3. Montrer (par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$) que pour tout d,

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\, \deg P \le d \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{d} P^k(\alpha).\frac{1}{k!}(X-\alpha)^k$$

4. On considère le polynôme

$$P = (X-1+i)^d + (X-1-i)^d$$

Donner (sans calculer les dérivés successifs) la valeur de $P^{(k)}(1)$ en fonction de $k \le d$.

2 Sous-espaces d'un espace vectoriel

2.1 Définition,exemples

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $F \subset E$ une partie *non vide* de E. On dit que F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E si

1. (Stabilité par somme) $\forall x, y \in F, x+y \in F$
2. (Stabilité par produit externe) $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$

Définition 8 (Equivalente)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $F \subset E$ une partie* non vide *de E. On dit que F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E s'il est* stable par combinaisons linéaires *i.e. si*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F$$

Un s.e.v est un e.v.

Autrement dit, F est un s.e.v de E si et seulement si les restrictions des opérations $+$ et . se restreignent en des opérations sur F : $+ : F \times F \to F$, $. : \mathbb{K} \times F \to F$. On définit ainsi des opérations sur F *héritées* des opérations sur E.

Proposition 9

Si F est un $\mathbb{K}$-s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v. E alors $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Rq : Le vecteur nul dans F est celui, « hérité » de E.

D'un point de vue pratique, quand on vous demande de prouver que tel ensemble F muni de certaines opérations $+$ et . est un $\mathbb{K}$-e.v., il s'agit d'identifier un $\mathbb{K}$-e.v. E de la liste officielle et de montrer que F en est un s.e.v.

Exemples

1. Si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^0(I) = \mathscr{C}^0(I;\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^I$,
2. $\mathbb{R}[X] \simeq \mathscr{P}(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ polynomiale}\}$, $\mathscr{R}(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ frac. rat. déf. sur } I\}$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^I$
3. $\mathscr{C}^\infty(I)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^{k+1}(I)$ sont des $\mathbb{R}$-sev de $\mathscr{C}^k(I)$.

$$\mathscr{P}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{R}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^\infty(I) \subset_{\text{sev}} \cdots \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^{k+1}(I) \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^k(I) \subset_{\text{sev}} \cdots \subset_{\text{sev}} \mathscr{C}^0(I) \subset_{\text{sev}} \mathbb{R}^I$$

4. Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, l'ensemble $\mathscr{L}$ des variables aléatoires réelles est un s.e.v de $\mathbb{R}^\Omega$. l'ensemble $\mathscr{L}^1$ des v.a. intégrables [19] est un s.e.v de $\mathscr{L}$, l'ensemble $\mathscr{L}^2$ des v.a. de carré intégrable [20] est un s.e.v de $\mathscr{L}^1$ et finalement l'ensemble $\mathscr{L}_{fini}$ des v.a. réelles prenant un nombre fini de valeurs est un s.e.v de $\mathscr{L}^2$.

$$\mathscr{L}_{fini} \subset_{\text{sev}} \mathscr{L}^2 \subset_{\text{sev}} \mathscr{L}^1 \subset_{\text{sev}} \mathscr{L} \subset_{\text{sev}} \mathbb{R}^\Omega$$

5. Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$,
6. Un plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Retour sur les exemples initiaux

1. L'ensemble S des solutions d'un système linéaire homogène (S) d'incoonnue $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
2. L'ensemble R des suites complexes (resp. réelles) vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients complexes (resp. réels) (R) est un sev de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{R}^\mathbb{N}$).
3. L'ensemble ED des fonctions vérifiant l'EDO linéaire homogène (ED) est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Intersection de s.e.v.

Proposition 10

1. Si F, G sont deux sev de E alors $F \cap G$ est un sev de E.
2. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont n sev de E alors $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sev de E.

Exemples :

1. Espace des solutions d'un système linéaire homogène.
2. Suites récurrentes vérifiant des conditions additionnelles, linéaires homogènes.
3. Solutions d'EDO vérifiant des conditions additionnelles, linéaires homogènes.

Remarque : l'exercice 17 (pas si facile) montre que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$. Hormis ce cas (trivial), $F \cup G$ n'est pas un sev de E.

19. *i.e.* admettant une espérance
20. *i.e.* admettant une variance

Exercice 13.— Déterminer lesquels des ensembles F suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Dans le cas où F est un s.e.v. de E préciser s'il s'agit de $\{0\}$, d'une droite vectorielle, d'un plan vectoriel et/ou de E tout entier.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x+4z-y=0\}$,
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; xy+4z=0\}$,
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2+y^2+z^2=1\}$,
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x+4z=0 \text{ ou } x+y+z=0\}$,
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x+4z=0 \text{ et } x+y+z=0\}$,
6. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 2y+1\}$,
7. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,
8. $E = \mathbb{R}^2$, $F_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$, $F_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$, $F_m \cap F_p$? $F_m \cup F_p$?
9. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{\lambda(1,2)+(0,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$,
10. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{\lambda(1,2)+\mu(3,4), (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 14.— Déterminer si les ensembles F suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. $n \in \mathbb{N}^*, E = \mathbb{R}[X], F = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) \leq n\}$,
2. $n \in \mathbb{N}^*, E = \mathbb{R}[X], F = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) \geq n\}$,
3. $E = \mathbb{R}[X], F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 1\}$,
4. $E = \mathbb{R}[X], F = \{P' + P'', P \in \mathbb{R}[X]\}$,
5. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$,
6. Soit $T > 0, E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ périodique de période $T\}$,
7. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = f(1)\}$,
8. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), F = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f$ monotone$\}$
9. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de E, $F = \{(w_n)_n, \exists\lambda, \nu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda u_n + \nu v_n\}$.
10. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, F le sous-ensemble des suites convergentes.

Exercice 15.— Déterminer si les ensembles F suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{C}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \; ; \; x+3y=1\}$,
2. $E = \mathbb{C}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \; ; \; x+iy=0\}$,
3. $E = \mathbb{C}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \; ; \; xy=1\}$,
4. $E = \mathbb{C}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \; ; \; x^2+y^2+z^2=0\}$,
5. $E = \mathbb{C}[X], F = \{P \in \mathbb{C}[X], P(0) = i\}$,
6. $E = \mathbb{C}[X], F = \{P + P' + 2P'', P \in \mathbb{C}[X]\}$,
7. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, F = \{(w_n)_n, \exists\lambda, \nu \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda e^{in\frac{\pi}{3}} + \nu n.2^n\}$.
8. $E = \mathbb{C}^{[0,2\pi]}, F = \{f \in E, f \in \mathscr{C}^2([0,2\pi], f'' + f = 0 \text{ et } f(0) = f(2\pi)\}$.

Exercice 16.—Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas. On précidera le corps des scalaires ainsi que l'ev de référence dont l'ensemble est un sev.
1. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de coefficient constant nul.
2. L'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_{3,5}(\mathbb{K})$ ayant une première colonne nulle.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 et nulles en 4 .
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4 .
5. L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales.
7. L'ensemble des suites arithmétiques à valeurs réelles.
8. L'ensemble des suites géométriques à valeurs complexes.
9. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré égal à $n \geqslant 2$ fixé.
10. L'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
11. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $]-1,1[$, continues, positives ou nulles.
12. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
13. L'ensemble des matrices carrées de taille n de diagonale nulle.
14. L'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires.

Exercice 17.— Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E.
1. Montrer que
$$(F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E) \Rightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F).$$
Indication:Montrer la contraposée en fabriquant deux vecteurs de $F\cup G$ dont la somme n'est pas dans $F\cup G$. Illustrer graphiquement.
2. Le même résultat est-il vrai si l'on suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 18.— Soit E un espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer l'équivalence
$$(\forall (x,y) \in F\times G, \forall (x',y') \in F\times G, x+y = x'+y' \Rightarrow x = x' \text{ et } y = y') \Leftrightarrow F\cap G = \{0\}$$
On traitera séparémment les deux implications.

Exercice 19.— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F, G deux sous-espaces de E. Soit
$$H = \{x+y, x\in F, y\in G\} = \{z\in E, \exists (x,y)\in F\times G, z = x+y\}$$
1. Montrer que H est un sev de E et que $F\cup G \subset H$.
2. Montrer que si K est un sev de E contenant $F\cup G$ alors $H \subset K$.
3. Donner un exemple simple (E, F, G non triviaux) tel que $H \neq E$. Illustration graphique ?

2.2 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Proposition–Définition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Le *sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille*, noté

$$\operatorname{Vect}\langle u_i,\, i\in I\rangle \text{ ou } \operatorname{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle,$$

est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_i)_{i\in I}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, *i.e.*

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}\langle u_i,\, i\in I\rangle = \operatorname{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle &= \{\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i,\, (\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I\}\\ &= \{z\in E,\, \exists(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I,\, z=\sum_{i\in I}\lambda_i.u_i\}\end{aligned}$$

Définition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{U}$ est *génératrice de E* si

$$E = \operatorname{Vect}\langle u_i, i\in I\rangle$$

Remarques :

1. Une *tautologie* : La famille finie $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice (ou *engendre*) l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}\langle u_i, i\in I\rangle$.
2. Cas limite : « la famille vide engendre l'espace nul. ». C'est la convention sur les sommes vides.

Exercices **Exercice 20.—** Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 21.— Soient $e_1 = (0, 1, -2, 1), e_2 = (1, 0, 2, -1), e_3 = (3, 2, 2, -1)$ et $e_4 = (0, 0, 1, 0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\operatorname{Vect}\langle e_1, e_2, e_3\rangle = \operatorname{Vect}\langle (1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\rangle$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \operatorname{Vect}\langle e_1, e_2\rangle \cap \operatorname{Vect}\langle e_2, e_3, e_4\rangle$.

Exercice 22.— Soient e_1, e_2, e_3, e_4 des éléments quelconques d'un espace vectoriel E. On pose

$$f_1 = e_1 + e_2\ ,\ f_2 = e_2 + e_3\ ,\ f_3 = e_3 + e_4\ ,\ f_4 = e_4 - e_1\ .$$

Peut-on exprimer e_1 en fonction de f_1, f_2, f_3, f_4 ? Même question avec e_2, puis avec e_3 et enfin avec e_4. A-t-on

$$\operatorname{Vect}\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle = \operatorname{Vect}\langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle\ ?$$

Exercice 23.— Dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère les quatre polynômes

$$P_0(X) = 1\ ,\ P_1(X) = X-1\ ,\ P_2(X) = (X-1)^2\ ,\ P_3(X) = (X-1)^3\ .$$

Soit F un élément de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrer que F peut se mettre sous la forme

$$F = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3.$$

Quelles sont les valeurs de $\lambda_0, \dots, \lambda_3$? Quelle formule retrouve-t-on ?
Que peut-on dire de $\mathrm{Vect}\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$?

Exercice 24.—
1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, considérons les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_n(x) = (\cos x)^n \text{ et } b_n(x) = \cos(n.x).$$

Montrer que pour tout n,

$$\mathrm{Vect}\langle a_0, \dots, a_n\rangle = \mathrm{Vect}\langle b_0, \dots, b_n\rangle\ .$$

2. On considère maintenant a_n, b_n comme des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, i.e. des éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. La fonction $x \mapsto e^{i100x}$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}\langle a_n,\ n \in \{0, \dots, 200\}\rangle$?

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $s_n(x) = \sin(n.x)$ et l'on considère le $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$,

$$V_{200} = \mathrm{Vect}\langle b_n, s_n,\ n \in \{0, \dots, 200\}\rangle\ .$$

La fonction $x \mapsto e^{i100x}$ appartient-elle à V_{200} ?

Exercice 25.— Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation (ED) suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{ED}$$

Exercice 26.— Montrer que l'ensemble de suites à valeurs réelles vérifiant la récurrence (R) suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \tag{R}$$

3 Applications linéaires

3.1 Définition-exemples

Définition 13

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application ($\mathbb{K}$)-linéaire si elle *respecte* les combinaisons linéaires, *i.e.*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

1. L'ensemble des applications linéaires $f : E \to F$ est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
2. Une application linéaire $f : E \to F$ « préserve » ou « respecte » les opérations d'espace vectoriel *i.e.* la prise de combinaisons linéaires. Plus précisémment
$$f(\sum_{i \in I} \lambda_i.u_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i.f(u_i)$$
3. Un synonyme d'application linéaire est *morphisme* d'espaces vectoriels, l'étymologie de ce mot traduit l'idée de préservation de la forme des expressions.
4. Quand $E = F$, on parle d'*endomorphisme*. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
5. Quand $F = \mathbb{K}$, on parle de *formes linéaires*, on note l'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Des exemples : formes linéaires

1. Evaluation d'une fonction en un point.
2. Evaluation d'un polynôme en un point.
3. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ avec un vecteur fixé. (On y consacrera un chapitre entier)
4. Intégrale d'une fonction.
5. Espérance d'une variable aléatoire intégrable.

Des exemples : endomorphismes

1. Application identité i_E, multiplication par un scalaire fixé, $\lambda.i_E$,
2. Transformations de l'espace $\mathbb{R}^n$. Matrices carrées. $X \mapsto A.X$
3. Multiplication par une fonction fixée. Varier la régularité.
4. Changement de variable pour les fonctions de variable réelle.

Des exemples divers

1. L'application nulle $x \in E \mapsto 0_F \in F$ est linéaire.
2. Transformation linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $X \mapsto A.X$ ou $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
3. Dérivation, primitivation.
4. Transformée intégrale.
5. Si $(u_i)_{i \in I}$ famille (finie) de vecteurs de E, on peut considérer
$$(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i.u_i \in E$$
.

3.2 Sous-espaces associés à une application linéaire

Le noyau. (en anglais, noyau c'est « kernel »)

Proposition–Définition 14

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-ensemble de E

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

est un s.e.v de E appelé le *noyau* de f.

Démonstration.

1. Comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$ et donc $0_E \in \operatorname{Ker} f$.
2. Soient $x, y \in \operatorname{Ker} f$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, comme f est linéaire,
$$f(\lambda.x+\mu.y) = \lambda.f(x)+\mu.f(y) = \lambda.0_F+\mu.0_F = 0_F$$
et donc $\lambda.x+\mu.y \in \operatorname{Ker} f$
3. $\operatorname{Ker} f$ est donc un s.e.v de E.

□

Exemples élémentaires

1. Un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle et réciproquement.
2. Pour l'opération de dérivation sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, le noyau, c'est l'ensemble des fonctions constantes.
3. Pour un système linéaire, le noyau de l'application linéaire associée, c'est l'ensemble des solutions du système homogène. Notation $\operatorname{Ker} A$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
4. L'ensemble des suites vérifiant une certaine relation de récurrence est le noyau d'une certaine a.l. laquelle (cf. exemples introductifs) ?
5. L'ensemble des fonctions vérifiant une certaine équation différentielle linéaire est le noyau d'une certaine a.l.. laquelle ?

L'image

Proposition–Définition 15

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-ensemble de F

$$\operatorname{Im} f := \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$$

est un s.e.v de F appelé l'*image* de f.

Démonstration.

1. $0_F = f(0_E) \in \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} f \subset F$,
2. Si $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et, par linéarité de f,
$$\lambda_1.y_1+\lambda_2.y_2 = f(\underbrace{\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2}_{\in E}) \in \operatorname{Im} f.$$
3. $\operatorname{Im} f$ est donc un s.e.v de F.

□

Exemples élémentaires

1. si u et v sont deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$-e.v. E, l'image de $f:\mathbb{R}^2 \to E$, $(\lambda,\mu)\mapsto f(\lambda,\mu)=\lambda.u+\mu.v$, c'est $\mathrm{Vect}\langle u,v\rangle$. Ceci se généralise à une famille finie $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E. $f:\mathbb{R}^I \to E$, $f((\lambda_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I}\lambda_i.u_i$.
2. Si $f\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est une forme linéaire, $\mathrm{Im}\, f=\{0\}$ ou $\mathbb{K}$.
3. Pour un système linéaire, l'image de l'application linéaire associée, c'est l'ensemble des seconds membres pour lesquels le système admet au moins une solution. Notation $\mathrm{Im}\, A$ où $A\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
4. Pour D, l'opération de dérivation sur $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$, l'image, c'est l'ensemble des fonctions admettant une primitive sur $\mathbb{R}$. On sait que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})\subset \mathrm{Im}\, D$
5. Pour D, l'opération de dérivation sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, l'image, c'est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant une primitive. C'est donc $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

Injectivité, surjectivité

Proposition 16

Soit $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$.
2. f est surjective (sur F) si et seulement si $\mathrm{Im}\, f=F$.
3. f est un isomorphisme entre E et F si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$ et $\mathrm{Im}\, f=F$.

Démonstration. Seul le premier point est réellement à démontrer, le deuxième est par définition de la surjectivité, le dernier par caractérisation de la bijectivité comme injection+surjection.

— Si f est injective, comme $f(0_E)=0_F$, 0_F admet 0_E comme unique antécédent et $\mathrm{Ker}\, f=\{0_E\}$.

— Réciproquement (c'est la nouveauté). Soient x, $y\in E$ tels que $f(x)=f(y)$. On a alors, par *linéarité* de f,
$$f(x-y)=f(x)-f(y)=0_F$$
donc $x-y\in\mathrm{Ker}\, f$ et donc $x-y=0_E$, i.e. $x=y$.

□

3.3 Restrictions

Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$, on peut la restreindre de plusieurs manières et construire des applications linéaires issues de f.

1. Si E' est un s.e.v. de E, on peut restreindre f à E' en définissant [21] $f_{|E'}:E'\to F$ par
$$\forall x\in E',\, f_{|E'}(x)=f(x)$$
On a $f_{|E'}\in\mathscr{L}(E',F)$.

21. Il s'agit de l'opération habituelle de restriction d'une application à une partie de son ensemble de départ : « $f_{|E'}$ » se lit « f restreinte à E' ». Cette notation est standard.

2. Si $E' \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ alors $f_{|E'}$ est injective. En général,
$$\operatorname{Ker} f_{|E'} = (\operatorname{Ker} f) \cap E'.$$
3. Si F' est un s.e.v. de F et $\operatorname{Im} f \subset F'$, on peut restreindre l'espace d'arrivée f à F' en définissant [22] $\tilde{f} : E \to F'$ par
$$\forall x \in E, \tilde{f}(x) = f(x)$$
On a $\tilde{f} \in \mathscr{L}(E, F')$.
4. Si $F' = \operatorname{Im} f$ alors $\tilde{f}$ est surjective. En général,
$$\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f.$$
5. Si E est un s.e.v. de F et si $\operatorname{Im} f \subset E$, alors on peut restreindre f en un endomorphisme de E, qui est bien souvent encore noté f.

Exemples : Dérivation et intégration :

1. Soit $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme de dérivation. Si $d \in \mathbb{N}^*$ est donné,
   - On peut restreindre D en un endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ (restriction du départ et de l'arrrivée) car :
   $$\forall P \in \mathbb{K}_d[X], D(P) = P' \in \mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$$
   Cet endomorphisme n'est ni injectif (son noyau est $\mathbb{K}_0[X] \neq \{0\}$), ni surjectif (son image est $\mathbb{K}_{d-1}[X]$).
   - On peut restreindre D en une application linéaire dans $\mathscr{L}(\mathbb{K}_d[X], \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Cette application linéaire n'est pas injective, elle est surjective.
   - En posant $E_d = \{P \in \mathbb{K}_d[X], P(0) = 0\}$. On peut restreindre D en une application linéaire dans $\mathscr{L}(E_d, \mathbb{K}_{d-1}[X]$. Cette application linéaire est injective et surjective, c'est un isomorphisme.
2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, contenant 0. On considère $S : \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ définie par :
$$\forall f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}), S(f) = x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$$
C'est une application linéaire injective (si $S(f) = 0$, en dérivant cette identité, $f = 0$ et donc $\operatorname{Ker} S = \{0\}$. On a $\operatorname{Im} S = \{g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}), g(0) = 0$.
   - Pour $k \in \mathbb{N}$, on peut restreindre S en une application linéaire $\mathscr{C}^k \to \mathscr{C}^{k+1}$. Cette application linéaire est injective.
   - On peut aussi restreindre S en un endomorphisme de $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty, f(0) = 0\}$. Il est injectif mais pas surjectif.

3.4 Résolution d'équations linéaires

Proposition 17. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $y \in F$ et considérons l'équation $(E_y) : f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, alors*

1. *Si $y \notin \operatorname{Im} f$, (E_y) n'a pas de solution.*
2. *Si $y \in \operatorname{Im} f$, et x_y est une solution particulière de (E_y) alors l'ensemble des solutions de (E_y) est*
$$S_y = \{x_y + x, x \in \operatorname{Ker} f\} =: x_y + \operatorname{Ker} f$$

Exemples : matrices et système linéaire. Une EDO linéaire avec second membre.

22. Il s'agit de l'opération un peu moins habituelle de restriction de l'ensemble d'arrivée d'une application : la condition restrictive sert à conserver une application définie partout. Il n'y a pas de notation dédiée

3.5 Exercices

Exercice 27.—Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires. Pour chaque application linéaire trouvée, déterminer son noyau et son image en en donnant une famille génératrice.
1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x-3$.
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$.
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x+5y$.
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (-x,y)$.
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xy$.
7. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$.
8. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto$ le symétrique de (x,y) par rapport à la droite d'équation $x+y-a=0$
9. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (xy,x,y)$.

Exercice 28.—Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit le $\mathbb{K}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ composée des applications $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \begin{array}{rccl} u(f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f''(x)+f'(x)+f(x) \end{array}$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau [23].
4. Mêmes questions mais avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 29.— Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \begin{array}{rccl} u(f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x)-\cos(x).f(x) \end{array}$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau.
4. Montrer [24] qu'elle est surjective.

Exercice 30.—Soit $n \geqslant 2$ et :

$$u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \mapsto XP(-4)+P(6)$$

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Déterminer le noyau de u.
3. Déterminer l'image de u.

Exercice 31.— Dans chacun des cas suivants, on définit une application $u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Déterminer si elle est linéaire ou pas et, en cas de linéarité, déterminer si elle est injective ou non.

1. $u(f) = f'$ 2. $u(f) = x \mapsto \int_0^x (x-t)^2 f(t)\, dt$

3. $u(f) = f.f''$ 4. $u(f) = x \mapsto f(x^3)$

---

23. en vous basant sur vos connaissances concernant les EDO linéaires du second ordre
24. en vous basant sur vos connaissances concernant les EDO linéaires du premier ordre

3.6 Opérations : CL/ composition, réciproque

Proposition 18

Si $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ alors l'application $\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2$ définie par

$$\forall x \in E,\ (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \lambda_1.(f_1(x)) + \lambda_2.(f_2(x))$$

est une application linéaire $E \to F$.

1. On remarque que $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev. On n'insiste pas sur ce point.
2. Exemple : Combinaison linéaire de deux évaluations.

Exercice 32.—Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f_B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ les applications linéaires linéaires canoniquement associées à ces matrices, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ f_A(X) = A.X \text{ et } \forall X \in \mathbb{C}^n,\ f_B(X) = B.X$$

On considère l'application linéaire $f = 2.f_A - 3.f_B$. Est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ?

Composition

Proposition 19

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Proposition 20

Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-e.v., $f, f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $g, g_1, g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ alors

$$g \circ (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2) = \lambda_1.(g \circ f_1) + \lambda_2.(g \circ f_2)$$

et

$$(\lambda_1.g_1 + \lambda_2.g_2) \circ f = \lambda_1.(g_1 \circ f) + \lambda_2.(g_2 \circ f)$$

Remarquer que la deuxième règle n'utilise pas le caractère linéaire des f et g's.

Exercice 33.— Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $f_B : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^n$ les applications linéaires linéaires canoniquement associées à ces matrices, *i.e.*

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ f_A(X) = A.X \text{ et } \forall Y \in \mathbb{C}^p,\ f_B(Y) = B.Y$$

1. Quelle est, si m, n et p sont distincts la seule composition possible entre f_A et f_B ?
2. Cette composée est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ? laquelle ?

Composition des endomorphismes

Proposition 21

Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., $f, g \in \mathscr{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E)$

On peut, dans le cas des endomorphismes, composer un endomorphisme avec lui-même. On note, pour $f \in \mathscr{L}(E)$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ occurences de } f}$. Par convention $f^0 = i_E$, l'application *identité* de E.

Exercice de composition **Exercice 34.—** Pour chacun des espaces $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ou $E = \mathbb{C}[X]$, on définit les deux endomorphismes $D : u \in E \mapsto D(u) = u' \in E$, et $M : u \in E \mapsto (x \mapsto x.u(x)) \in E$.
1. Calculer $D \circ M$, $M \circ D$ et $D \circ M - M \circ D$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, M définit-il, par restriction, un endormorphisme de $\mathbb{C}_d[X]$?
3. Montrer que $M \circ D$ et $D \circ M$ définissent des endormorphismes de $\mathbb{C}_d[X]$.

Exercice : polynômes d'endomorphismes

Définition 22. *Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P = p_0 + p_1.X + \cdots + p_d.X^d$, on note*

$$P(f) = p_0.i_E + p_1.f + \cdots + p_d.f^d$$

Exercice 35.—
1. Montrer les identités suivantes, pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathscr{L}(E)$,
1.a. $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$, **1.b.** $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$, **1.c.** $(P \circ Q)(f) = P(Q(f))$.
2. Montrer les identités suivantes pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
2.a. $(i_E + f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k$, **2.b.** $(i_E - f) \circ (i_E + f + \cdots + f^{n-1}) = i_E - f^n$
3. On considère $D : u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mapsto u' \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $P = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Calculer $[P(D)](\cos)$.

Réciproque

Proposition 23

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est *bijective* alors sa réciproque, $f^{-1} : F \to E$ est *linéaire* : $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$. Dans ce cas, on a

$$f^{-1} \circ f = i_E \text{ et } f \circ f^{-1} = i_F$$

où i_E et i_F sont les endomorphismes *identité* de E et F.

Vocabulaire

1. si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, on dit que c'est un *isomorphisme*.
2. si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev et s'il existe $f : E \to F$ un isomorphisme, on dit que E et F sont *isomorphes* en tant que $\mathbb{K}$-ev.
3. si $f : E \to E$ est un endomorphisme, bijectif alors on dit aussi que c'est un *automorphisme* de E. Dans ce cas, f^{-1} est aussi un automorphisme de E.

Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in F$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x = f^{-1}(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2)$ est l'*unique* solution de l'équation d'inconnue $x \in E$,

$$f(x) = \lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$$

Si $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, on a alors, par linéarité de f,

$$f(\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2) = \lambda_1.f(x_1) + \lambda_2.f(x_2) = \lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2$$

et l'unicité donne la conclusion tant recherchée...

$$x = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2$$

i.e.

$$f^{-1}(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2) = \lambda_1.f^{-1}(y_1) + \lambda_2.f^{-1}(y_2)$$

$\square$

Exercice 36.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.A quelle condition sur A, f_A est-elle un isomorphisme [25]. Si cette condition est remplie, f_A^{-1} est-elle associée canoniquement à une certaine matrice ?

Exercice 37.— Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions réelles, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Justifier rapidement que F est un s.e.v de E et montrer que $D : F \to E$ définie par

$$\forall f \in F, D(f) = f'$$

est un isomorphisme. Donner l'expression de l'isomorphisme réciproque.

Exercice 38.—Soit E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = i_E$ l'application identité de E.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ et $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.

Exercice 39.— Soient E, F et G trois espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
2. Montrer que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 40.—Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$

Exercice 41.—On définit ϕ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \ \phi(P) = (1 - X^2)P' + (3X+1)P$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ (NB : vérifier sa bonne définition)
2. Donner son noyau. L'application ϕ est-elle surjective de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$?

25. automorphisme, en fait vu qu'espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes

3.7 Un exemple à suivre : Le Problème d'interpolation de LAGRANGE

Présentation : interpoler ? kézako ? On sait (d'expérience !) que l'indice de réfraction n [26] de certains matériaux dépend de la longueur d'onde λ de l'onde incidente suivant une loi [27] de la forme

$$n = p_0 + p_1 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + p_2 \cdot \frac{1}{\lambda^4}$$

où les coefficients réels p_0, p_1, p_2 sont caractéristiques du matériau. On a effectué des mesures, à l'aide d'un goniomètre, pour un certain type de verre, regroupées dans le tableau :

$\lambda\,(nm)$	404,7	434,7	546,1
n	1,540	1,536	1,526

Peut-on, à partir de ces mesures, déterminer les coefficients p_0, p_1, p_2 ?

On peut voir cette question comme un problème d'*interpolation* :

On dispose de trois nombres réels distincts z_0, z_1 et z_2 (les carrés des inverses des longueurs d'onde), des trois valeurs de n correspondantes, n_0, n_1 et n_2 et il s'agit de trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$\forall i = 0, 1, 2, P(z_i) = n_i$$

En écrivant les choses telles qu'elles viennent, on voit que ce problème se réduit à résoudre le système linéaire d'inconnue (p_0, p_1, p_2),

$$\left\{ \begin{array}{llllll} p_0 & +p_1.z_0 & +p_2.z_0^2 & = & n_0 \\ p_0 & +p_1.z_1 & +p_2.z_1^2 & = & n_1 \\ p_0 & +p_1.z_2 & +p_2.z_2^2 & = & n_2 \end{array} \right.$$

On laisse le lecteur remplacer les paramètres z_i, n_i par leurs valeurs obtenues à partir du tableau et fourrer le système linéaire dans un système de calcul afin d'obtenir, via la résolution par l'algorithme de GAUSS, les valeurs exactes de p_0, p_1 et p_2.

Application « Evaluation aux points d'interpolation » Plus généralement, soit $d \in \mathbb{N}^*$, $z_0, z_1, \ldots, z_d$ $d+1$ nombres complexes distincts. Considérons l'application $\Lambda : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$ définie par

$$\Lambda(P) = (P(z_0), \ldots, P(z_d))$$

C'est une application linéaire. Cette application intervient naturellement dans le problème de l'interpolation polynomiale :

Etant données $d+1$ valeurs $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$, existe-t-il un polynome à coefficients complexes P tel que $\forall i \in \{0, \ldots, d\}, P(z_i) = \alpha_i$ *i.e.* tel que $\Lambda(P) = \alpha$?

On voit que, en fixant le degré a priori du polynôme, ce problème équivaut à résoudre un certain système linéaire.

La question est de comprendre ce qu'on peut attendre de la résolution de ce système *d'une manière générale* : Y a-t-il de tels polynômes ? Combien ? Comment différent-ils ? Qu'imposer de plus pour garantir l'unicité d'une solution.

Ce sont des questions liées à l'image $\operatorname{Im} \Lambda$ et au noyau $\operatorname{Ker} \Lambda$....

Cet exemple illustre parfaitement les interactions entre algèbre linéaire et les autres théories (en l'occurence la théorie des polynômes)

26. Il s'agit du rapport entre célérité de la lumière dans le vide et vitesse de phase de l'onde lumineuse, grandeur sans dimension

27. dite loi de CAUCHY, *cf.* `https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Cauchy_(optique)`, cette loi est liée à la séparation de la lumière blanche par un prisme

Le noyau de Λ. On a, en posant $L(X) = \prod_{i=0}^{d}(X - z_i)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\Lambda &= \{P \in \mathbb{C}[X], \forall i \in \{0,\dots,d\}, P(z_i) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{C}[X], \exists Q \in \mathbb{C}[X], P = Q.L\} \end{aligned}$$

En conséquence, la restriction notée Λ_d de Λ à $\mathbb{C}_d[X]$ est injective $\operatorname{Ker}\Lambda_d = \operatorname{Ker}\Lambda \cap \mathbb{C}_d[X] = \{0\}$ et, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\operatorname{Ker}(\Lambda) \cap \mathbb{C}_{d+\ell}[X] = \operatorname{Vect}\left\langle L, X.L, \dots, X^{\ell}.L \right\rangle$$

Polynômes d'interpolation de LAGRANGE A la famille $z_k, k \in \{0,\dots,d\}$ de $d+1$ nombres complexes distincts, on peut associer la famille de polynômes d'interpolation de LAGRANGE : $L_\ell, \ell \in \{0,\dots,d\}$, polynômes de degré d vérifiant :

$$\forall k \in \{0,\dots,,\}\, d, \forall \ell \in \{0,\dots,d\}, L_\ell(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

en posant

$$L_\ell = C_\ell . \prod_{k \neq \ell}(X - z_k), \text{ avec } C_\ell = \frac{1}{\prod_{k \neq \ell}(z_\ell - z_k),}.$$

L'image de Λ. L'existence de ces polynômes assure que chaque vecteur e_ℓ de la base canonique de $\mathbb{C}^{d+1}$ est présent[28] dans l'espace $\operatorname{Im}\Lambda$ et donc que $\mathbb{C}^{d+1} = \operatorname{Vect}\langle e_0, \dots, e_d\rangle \subset \operatorname{Im}\Lambda \subset \mathbb{C}^{d+1}$.

L'application Λ est donc surjective.

Restriction de Λ en un isomorphisme .

Le fait que les polynômes L_ℓ soit tous de degré $\leq d$ montre que la restriction Λ_d de Λ à $\mathbb{C}_d[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$ est elle aussi surjective. Comme elle est injective, elle est bijective et c'est un isomorphisme de $\mathbb{C}_d[x]$ vers $\mathbb{C}^{d+1}$.

On a donc démontré : si $z_0, \dots, z_d$ sont $d+1$ nombres complexes distincts,

$$\forall(\alpha_0, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^{d+1}, \exists! P \in \mathbb{C}_d[X], \forall k \in \{0,\dots,d\}, P(z_k) = \alpha_k$$

Ce polynôme P, unique polynôme de degré $\leq d$ solution du problème d'interpolation polynomiale $\forall k \in \{0,\dots,d\}, P(z_k) = \alpha_k$ s'écrit explictement

$$P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k . L_k$$

où les polynômes L_k sont les polynômes d'interpolation de LAGRANGE associés aux points $z_0, \dots, z_k$.

28. On a : $\Lambda(L_\ell) = e_\ell$

4 Eléments propres des endomorphismes.

4.1 Définitions

Définition 24

Soit f un endomorphisme de E.
Un vecteur $v \in E$, *non nul* tel que $f(v)$ est colinéaire à v est appelé un vecteur propre ($\overrightarrow{\text{v.p.}}$) de f. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda.v$ est appelé la *valeur propre* (v.p.) de f associée à v. En résumé, un vecteur v de E est vecteur propre de l'endomorphisme f si :

1. v est non nul.
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda.v$

Exercice 42.—
1. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et l'endomorphisme $D \in \mathscr{L}(E)$ de dérivation, *i.e.* défini par

$$\forall f \in E, D(f) = f'$$

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de D. Pour chaque valeur propre de D, donner une famille libre, génératrice de Ker $(D - \lambda.i_E)$.
2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'endomorphisme $D \in \mathscr{L}(E)$ de dérivation.

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de $D^2 = D \circ D$. Pour chaque valeur propre de D^2, donner une famille libre, génératrice de Ker $(D^2 - \lambda.i_E)$.
3. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et l'endomorphisme $D \in \mathscr{L}(E)$ de décalage à droite, *i.e.* défini par

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, D(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de D. Pour chaque valeur propre de D, donner une famille libre, génératrice de Ker $(D - \lambda.i_E)$.

Reformulons encore :

Définition 25

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$, un endomorphisme de E.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est *valeur propre* de f s'il existe $v \in E$, $v \neq 0$ tel que

$$f(v) = \lambda.v$$

Un tel vecteur v est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

— L'ensemble des valeurs propres de f. appelé le *spectre* de f. Il est noté Spec(f).

Remarque : Lorsque f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement [29] associé à une matrice carrée $n \times n$, A, les éléments propres de f sont les éléments propres de cette matrice dont les définitions ont été vues précédemment.

29. défini par $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $f(X) = A.X$

Proposition–Définition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note

$$E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda.\mathrm{id}_E)$$

On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \in \operatorname{Spec}(f) \Leftrightarrow E_\lambda(f) \neq \{0\}$$

Si $\lambda \in \operatorname{Spec}(f)$, on appelle $E_\lambda(f)$, le sev *propre* de f associé à la v.p. λ.

Remarque : Les vecteurs propres de f asssociés à la valeur propre λ sont exactement les éléments non nuls du sous-espace propre $E_\lambda(f)$.

Proposition 27

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$.

— Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$, d éléments de $\mathbb{K}$ **distincts** et $x_1, \ldots, x_d \in E$ des vecteurs tels que :
  1. $\forall k \in \{1, \ldots, d\}, x_k \in E_{\lambda_k}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_k.\mathrm{id}_E)$,
  2. $\sum_{k=1}^{d} x_k = 0$.

  Alors :

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, x_k = 0.$$

— (Corollaire) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$, d valeurs propres **distinctes** de f et $x_1, \ldots, x_d \in E$ des vecteurs propres de f associés à chacune. La famille $(x_1, \ldots, x_d)$ est libre dans E.

Démonstration. Sachant le premier point, le corollaire est un bon exercice de compréhension. Pour la démonstration de premier point : cours oral (récurrrence ? polynômes de LAGRANGE ?) !

□

4.2 Utilisation de polynômes annulateurs pour déterminer le spectre

Exercice 43.—Soit f un endormorphisme de E vérifiant $f \circ f - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$.
1. Montrer que f est un automorphisme de E et exprimer son inverse en fonction (polynôme) de f.
2. Montrer, d'une manière générale, que si λ est v.p. de f alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ^k est v.p. de f.
Indication:le vecteur propre associé ne change pas beaucoup...
3. Montrer –dans le cas qui nous intéresse– que si λ est v.p.de f alors $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ et conclure sur les possibilités de spectre de f.

Exercice 44.—Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev E et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathrm{id}_E$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres possibles de f.