Corrections choisies 09

Algèbre linéaire en dimension finie.

Correction Ex.–19

1. Soit, pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_k(t) = e^{ik.t}$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_n := (e_{-n}, .., e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n)$.

Prouvons la liberté de la famille $\mathscr{E}_n$.

Soient $\lambda_{-n}, \dots \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_{-n}e_{-n} + \cdots + \lambda_0.e_0 + \cdots + \lambda_n.e_n = 0$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \lambda_{-n}e^{-nit} + \cdots + \lambda_0.e^{0.t} + \cdots + \lambda_n.e^{i.n.t} = 0$$

et en multipliant par e^{int}, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R},\, \lambda_{-n} + \cdots + \lambda_0.e^{i.n.t} + \cdots + \lambda_n.e^{2i.n.t} = 0$$

En posant le polynôme $P = \lambda_{-n} + \cdots + \lambda_0.X^n + \cdots + \lambda_n.X^{2.n}$, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\, P(e^{it}) = 0$$

Le polynôme P admet donc tous les points du cercle trigonométrique comme racines (ça en fait beaucoup trop !) et P est le polynôme nul. Les coefficients λ_k valent tous 0 et $\mathscr{E}_n$ est libre.

C'est une base de $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ et, en comptant le nombre de ces vecteurs, on obtient

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle = 2n+1$$

2. L'application D^2 définie comme endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}),\, D^2(f) = f''$$

est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (linéarité de la dérivation, conservation du caractère $\mathscr{C}^\infty$ par dérivation) et il s'agit de montrer qu'il se restreint en un endomorphisme de $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.

Pour tout $k \in \{-n, \dots 0, \dots, n\}$, on a

$$D^2(e_k) = -k^2.e_k \in \text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$$

Donc la restriction de D^2 à $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ est dimage contenue dans $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ et donc D^2 se restreint en unn endomorphisme de $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.

La matrice de D^2 relativement à la base $\mathscr{E}_n$ de $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ est la matrice diagonale avec l'élément $-k^2$ sur la place (k,k) (on numérote lignes et colonnes par des indices dans $\{-n, \dots 0, \dots, n\}$.

3. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, resp. pour $k \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, resp. $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\, c_k(t) = \cos(k.t), \text{ resp.} \forall t \in \mathbb{R},\, s_k(t) = \sin(k.t), \text{ resp.}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{C}_n = (c_k, k \in \{0, \dots, n\}),\, \mathscr{S}_n = (s_k, k \in \{1, \dots, n\}),\, \mathscr{C}\mathscr{S}_n = \mathscr{C}_n \# \mathscr{S}_n$$

3.a. La famille $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$ contient $2n+1 = \dim \text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$. Pour montrer que c'est une base de $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de cet espace.

— Les vecteurs de $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$ sont dans $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ car, $c_0 = 1 = e_0$ et pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_k = \frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}e_{-k} \text{ et } s_k = \frac{1}{2i}e_k - \frac{1}{2i}e_{-k}$$

et donc $\text{Vect}\langle\mathscr{C}\mathscr{S}_n\rangle \subset \text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.

— Comme $e_0 = c_0$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$e_k = c_k + i.s_k \text{ et } e_{-k} = c_k - i.s_k$$

on a $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle \subset \text{Vect}\langle\mathscr{C}\mathscr{S}_n\rangle$.

— On a donc $\text{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle = \text{Vect}\langle\mathscr{C}\mathscr{S}_n\rangle$, comme recherché.

3.b. On prend $n = 3$. La matrice de passage P de $\mathscr{CS}_n$ vers $\mathscr{E}_n$ est la matrice ${}^{\mathscr{CS}_n}[id]_{\mathscr{E}_n}$ et donc (attention à la numérotation !) dont la colonne correspondant à e_k contient les coordonnées de e_k sur la base $\mathscr{CS}_n$. On a donc (les colonnes correspondant dans l'ordre à $e_{-3}, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, e_3$, les lignes à $c_0, c_1, c_2, c_3, s_1, s_2, s_3$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{E}_n$ vers $\mathscr{CS}_n$, c'est la matrice ${}^{\mathscr{E}_n}[id]_{\mathscr{CS}_n}$ et donc (attention à la numérotation !) dont la colonne correspondant à c_k ou s_k contient les coordonnées de c_k ou s_k sur la base $\mathscr{E}_n$. On a donc (les colonnes correspondant dans l'ordre à $c_0, c_1, c_2, c_3, s_1, s_2, s_3$, les lignes à $e_{-3}, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, e_3$, on utilise aussi le fait que $\frac{1}{i} = -i$)

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

3.c. On prend $n = 3$. Comme $D^2(c_k) = -k^2.c_k$ et $D^2(s_k) = -k^2.s_k$, la matrice de D^2 relativement à la base $\mathscr{CS}_n$ est diagonale (avec le même ordonnancement des lignes/colonnes par $c_0, c_1, c_2, c_3, s_1, s_2, s_3$) et vaut

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$