Notes de cours 09

Algèbre linéaire en dimension finie.

Table des matières

1 Bases et dimension

Familles libres et liées

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $u, v \in E$ sont *colinéaires* si

— Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda.v$

— ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $v = \lambda.u$

Remarques :

— Cette définition est symétrique. Elle est posée de la sorte pour que le vecteur nul soit colinéaire à tout vecteur $u \in E$. (En effet $0_E = 0.u$). Si u n'est pas nul, u et v sont colinéaires ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda.u$, i.e ssi $v \in \text{Vect}\langle u \rangle$.

— Si u et v sont colinéaires et si v et w sont colinéaires alors u et w sont colinéaires.

— Le déterminant nul, critère de colinéarité dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{C}^2$.

Exercice 1.—Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.
1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.
2. Trouver une relation entre v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire une égalité de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$.

Exercice 2.—Etant donnés deux vecteurs u et v dans $\mathbb{K}^n$, on peut en choisissant 2 indices distincts i, j parmi $\{1, \ldots, n\}$ composer le déterminant $d_{ij} = \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$

Montrer que u et v sont colinéaires si et seulement si les $\frac{n.(n-1)}{2}$ déterminants d_{ij} sont nuls.

Définition 2

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que cette famille est libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i \in I} \lambda_i.u_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

La famille est dite *liée* si elle n'est pas libre. Dans ce cas, il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ finie de scalaires *non tous nuls* telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i.u_i = 0$. Une telle relation s'appelle une *relation de dépendance linéaire* entre les u_i.

Remarques

1. La famille vide est libre...c'est de la pure logique
2. Une famille contenant le vecteur nul est liée.
3. hormis ce cas limite, une autre façon de montrer que $(u_i)_{i \in I}$ est libre est de vérifier que la seule solution de l'équation
$$\sum_{i \in I} \lambda_i.u_i = 0$$
d'inconnue $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est $0 \in \mathbb{K}^I$.
4. Ceci permet de se ramener à la résolution d'un certain système linéaire à inconnue dans $\mathbb{K}^I$.

Exemples

1. Un vecteur u non nul forme une famille libre à un élément.
2. (u,v) est une famille libre ssi u et v ne sont pas colinéaires.
3. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$, la famille $u_1 = ...$, $u_2 = ...$, $u_3 = ...$ forme une famille libre.
4. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, la famille $u_1 = ...$, $u_2 = ...$, $u_3 = ...$ forme une famille liée. Une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs est $...u_1 + ...u_2 + ...u_3 = 0$.
5. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}[X]$ une famille finie de polynômes de degré distincts est une famille libre. (**proposition à retenir, utilisable directement**)
6. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}[X]$, la famille $(1, X, \dots, X^d)$ est libre.
7. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, la famille de fonctions sin, cos, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une famille liée.
8. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille de fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos 2x$ et $x \mapsto \cos^2 x$ est liée.
9. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, la famille de fonctions $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ où $e_k : x \mapsto e^{ikx}$ est libre.
10. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la famille (u^+, u^-) de suites définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ = q_+^n, u_n^- = q_-^n,$$
où $q_\pm$ sont deux nombres complexes *distincts* est libre.
11. Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, la famille (f_+, f_-) de fonctions définies par
$$\forall t \in \mathbb{R}, f_+(t) = e^{q_+ . t}, f_-(t) = e^{q_- . t},$$
où $q_\pm$ sont deux nombres complexes *distincts* est libre.

Exemples : cont'd

1. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$, la famille de vecteurs $\mathscr{C} = (e_i, i \in \{1, \dots, n\})$ définis par la i-ème coordonnée de e_i vaut 1, les autres valent 0. est une famille libre.
2. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la famille de matrices $(E_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ définies par « L'élément de E_{ij} à la ligne i, colonne j vaut 1, les autres éléments valent 0 » est libre.
3. (Théorème important du cours **diagonalisation**). Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   — Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Spec}(A)$ sont des valeurs propres distinctes associées aux vecteurs propres X_1 et X_2 alors (X_1, X_2) est libre.
   — Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$: Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathrm{Spec}(A)$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes associées respectivement aux vecteurs propres $X_1, \dots, X_p$ alors $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.

Sur-familles/Sous-familles

Proposition 3

1. Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i \in I}$ est libre alors toute famille extraite de $\mathscr{U}$ est libre.
2. Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i \in I}$ est liée alors toute sur-famille de $\mathscr{U}$ est liée.

Liberté et applications linéaires

Proposition 4

Soit $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On a équivalence entre

1. $\mathscr{U}$ est libre.
2. L'application linéaire $\mathbb{K}^I \to E$, $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i$ est injective.

Démonstration. Il s'agit d'une réécriture de la définition de famille libre. □

Exercice 3.— Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Montrer l'équivalence entre

1. ϕ est injective.
2. Pour toute famille libre $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E, la famille $(\phi(u_i))_{i\in I}$ est libre dans F.

Extraction de familles libres

Proposition 5: Lemme crucial pour l'extraction

Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors pour tout vecteur $v \in E$, on a équivalence entre

1. $((u_i)_{i\in I}, v)$ est liée,
2. $v \in \mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle$.

Proposition 6

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille finie de vecteurs de E, il existe alors une sous-famille $(u_i)_{i\in J}$, *libre*, telle que

$$\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle = \mathrm{Vect}\langle u_i, i \in J\rangle .$$

Démonstration. Pour la proposition 5 :

— Si $((u_i)_{i\in I}, v)$ est liée alors il existe des scalaires $\lambda_i, i \in I$, μ, *non tous nuls* tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i + \mu.v = 0$. Si $\mu = 0$, alors les scalaires $\lambda_i, i \in I$, *non tous nuls*, vérifient $\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i = 0$, ce qui est impossible car $\mathscr{U}$ est libre. Il s'ensuit que $\mu \neq 0$ et que

$$v = -\sum_{i\in I} \frac{\lambda_i}{\mu}.u_i \in \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle$$

— Si $v \in \mathrm{Vect}\langle \mathscr{U}\rangle$ alors il existe des scalaires $\lambda_i, i \in I$ tels que $v = \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i$ *i.e.* $\sum_{i\in I} \lambda_i.u_i - v = 0$. Comme la famille de coefficients $((\lambda_i)_{i\in I}, -1)$ n'est pas nulle, $((u_i)_{i\in I}, v)$ est liée.

Pour la proposition 6 : On considère toutes les parties J de I et on en prend une maximale pour la propriété « $(u_i)_{i\in J}$ est libre ». La proposition 5 assure que tout vecteur u_i pour $i \in I$ [1] est dans $\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in J\rangle$. Cette famille engendre donc $\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle$, *i.e.*

$$\mathrm{Vect}\langle u_i, i \in I\rangle = \mathrm{Vect}\langle u_i, i \in J\rangle .$$

□

1. distinguer les cas $i \in J$ et $i \notin J$

1.1 Bases

Conformément au programme, on se limite au cas de familles finies de vecteurs.

Définition 7

Soit $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de l'espace E. On dit que $\mathscr{U}$ est une *base* de E si $\mathscr{U}$ est libre et génératrice de E.

Définition 8

On dit que E est un espace de *dimension finie* s'il existe une famille génératrice finie de E

Théorème 9

Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si il admet une base.

Exemples

1. Bases canoniques $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{M}_d$.
2. D'autres bases dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{C}^n$.
3. D'autres bases dans $\mathbb{C}_d[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$,...

Toutes les bases ont même cardinal

Théorème 10

Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont deux bases d'un e.v. E alors I et J ont même nombre d'éléments.

Démonstration. Toute la preuve de ce théorème tient en la remarque suivante dont on se sert couramment

Lemme 11. *Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de Vect$\left\langle v_j,\ j \in J\right\rangle$ et $\#I > \#J$ alors $(u_i)_{i\in I}$ est liée.*

A l'oral, explication du lemme, preuve du théorème. □

Dimension/Exemples

Définition 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. La dimension de E est le cardinal de l'une quelconque de ses bases. On note ce nombre $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$ lorsque l'on veut préciser les scalaires).

Exemples :

1. $\{0\}$ est de dimension 0 (convention.). $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.
2. $\mathbb{C}^n$ est de dimension n en tant que $\mathbb{C}$-ev, de dimension $2n$ en tant que $\mathbb{R}$-ev. (Ne pas insister)
3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_d[X] = d+1$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_d[X] = d+1$,
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m.n$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C}) = m.n$
5. On reprend nos exemples de départ.

Utilisation élémentaire de la dimension

Proposition 13

Soit E un e.v. de dimension n, $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si $\#I > n$, $\mathscr{U}$ est liée.
2. Si $\#I < n$, $\mathscr{U}$ est n'est pas génératrice de E.
3. Si $\#I = n$ et $\mathscr{U}$ est libre alors $\mathscr{U}$ est une base de E.
4. Si $\#I = n$ et $\mathscr{U}$ est génératrice de E alors $\mathscr{U}$ est une base de E.

Exercice 4.— Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Soit $f_a : P \mapsto P(a)$ avec $a \in \mathbb{K}$ fixé. Montrer que $f_a \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$.
2. Soit $A = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ tel que} P(3) = 0\}$. Montrer que A ssev de $\mathbb{K}_n[X]$. En donner une base et la dimension.
3. En donner au moins 2 autres bases.

Exercice 5.—Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.
1. A admet au plus 4 valeurs propres distinctes.
2. Si A admet exactement 4 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
3. Généralisation de ces énoncés à $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

Fil rouge : Polynômes d'interpolation de LAGRANGE

Proposition 14. *Soit $z_0, z_1, \dots, z_d$, $d+1$ nombres complexes distincts. Pour chaque $i \in \{0, \dots, d\}$, on définit le polynôme :*

$$L_i(X) = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)} \prod_{j\neq i}(X - z_j).$$

1. *La famille $(L_0, \dots, L_d)$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$.*
2. *Etant donnés $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ $d+1$ nombres complexes, le polynome $P := \sum_{i=0}^{d} \alpha_i L_i$ vérifie*
$$\forall i \in \{0, \dots, d\}\, P(z_i) = \alpha_i$$
3. *Autrement dit, l'application Λ définie en fin de poly. précédent est surjective. Sa restriction à $\mathbb{C}_d[X]$ l'est aussi.*

Croissance de la dimension

Proposition 15

Si E est de dimension finie et F est un sev de E alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
Si $\dim F = \dim E$, on a $E = F$.

Démonstration. Supposons $F \neq \{0\}$. Si $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ est une famille libre composée de vecteurs de F, alors $\#I \leq \dim E$. Prenons maintenant une telle famille $\mathscr{U}$ de cardinal maximal p. On a $p \leq n$. Si $v \in F$, la famille $(\mathscr{U}, v)$ ne peut être libre car de cardinal $> p$, elle est donc liée et, comme $\mathscr{U}$ est libre, $v \in \mathrm{Vect}\langle\mathscr{U}\rangle$. Ceci démontre que $F = \mathrm{Vect}\langle\mathscr{U}\rangle$ et donc que $\mathscr{U}$ est une base de F. F est donc de dimension finie, dimension égale à p. Si $p = n$ alors $\mathscr{U}$ est une famille libre de $\dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E et $F = E$. □

1.2 Bases et applications linéaires

Proposition 16

Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. E un espace de dimension finie. $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. La famille $(\phi(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im}\phi$.

Exemples. App. Lin. déf. par matrice. Autres.

Proposition 17

Soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. E un espace de dimension finie. On a équivalence entre

1. ϕ est un isomorphisme.
2. Pour une base $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ de E, $\phi(\mathscr{U}) = (\phi(u_i))_{i\in I}$ est une base de F.
3. Pour toute base $\mathscr{U} = (u_i)_{i\in I}$ de E, $\phi(\mathscr{U}) = (\phi(u_i))_{i\in I}$ est une base de F.

Exemples

1. Application $X \in \mathbb{K}^n \mapsto A.X \in \mathbb{K}^p$ où $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
2. Polynômes de LAGRANGE. L'application Λ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_d[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$.

Proposition 18: Dimension, l'invariant d'isomorphie

1. $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ ssi E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.
2. Si $m \neq n$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ ne sont pas isomorphes.
3. Si E, F sont de dimension finie, $\dim_{\mathbb{K}} E \neq \dim_{\mathbb{K}} F$, E et F ne sont pas isomorphes.

Proposition 19

Soit E de dimension finie, $\phi : E \to F$ une application linéaire.

1. Si ϕ est surjective, $\dim F \leq \dim E$.
2. Si ϕ est injective, soit F n'est pas de dimension finie, soit $\dim E \leq \dim F$.

1.3 Application coordonnées

Proposition–Définition 20

Si $\mathscr{E} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, l'application $\mathbb{K}^I \to E$, $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i$ est un isomorphisme. Sa réciproque est l'*application coordonnées dans la base* $\mathscr{E}$.

Autrement dit, pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i$.

Notation : on notera ${}^{\mathscr{E}}[x]$ ou $\operatorname{Mat}(x, \mathscr{E})$ le vecteur des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathscr{E}$.

Attention : la première, ma préférée, est une notation non standard, inspirée de notations américaines, *cf.* remarques 27, p.10 et 32, p.12, l'autre est celle utilisée dans des livres qui se recopient les uns les autres sans trop réfléchir à la pertinence d'une notation.

Exemples.

1. Coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_d[X]$.
2. Coordonnées dans une base de $\mathbb{K}^n$: méthode de calcul.
3. Formule de TAYLOR : Dans $E = \mathbb{C}_d[X]$, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathscr{U}_\alpha = (1, X-\alpha, \ldots, (X-\alpha)^d) = ((X-\alpha)^\ell)_{\ell\in\{0,\ldots,d\}}$ alors pour tout $P \in \mathbb{C}_d[X]$, ${}^{\mathscr{U}_\alpha}[P] = \left(\frac{P^{(\ell)}(\alpha}{\ell!}\right)_{\ell\in\{0,\ldots,d\}}$.
4. Polynômes de LAGRANGE. Soit $\mathscr{L} = (L_i)_{i\in\{0,\ldots,d\}}$ la base de $\mathbb{C}_d[X]$ des polynômes de LAGRANGE associée à une famille $(z_0, \ldots, z_d)$ de $d+1$ nombres complexes distincts. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_d[X]$, ${}^{\mathscr{L}}[P] = (P(z_i))_{i\in\{0,\ldots,d\}}$.

Rang d'une famille de vecteurs

Définition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle *rang* de cette famille, noté $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n)$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$.

Exercice : calcul pratique du rang Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension d muni d'une base $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_d)$. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E, le rang de cette famille est égal à au rang de la famille de vecteurs $({}^{\mathscr{E}}[u_1], \ldots, {}^{\mathscr{E}}[u_n])$ dans $\mathbb{K}^d$. Celui-ci peut se calculer à l'aide d'un pivot de GAUSS. Pourquoi ?

Rang d'une application linéaire

Définition 22

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle *rang* de cette application, noté $\mathrm{rg}(\phi)$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,\phi$ si celui-ci est de dimension finie.

Exemples : rang d'a.l et rang de matrice. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ définie par $\phi(X) = A.X$ où $A = \ldots,\ldots$ Donner le rang de ϕ.

Exercice 6.—Rang de matrices
1. Démontrer que le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifie $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$
2. Démontrer que si A, B sont deux matrices telles que $C = A.B$ est bien définie alors

$$\mathrm{rg}(C) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$$

3. Montrer que si $n > p$ et $M \in \mathscr{M}_\mathbb{R}$ alors $\Sigma = M.M^\top$ n'est pas inversible.

(On verra dans le cours sur les produits scalaires, que si $n \leq p$ et $\mathrm{rg}(M) = n$ alors $\Sigma = M.M^\top$ est inversible.)

Exercice : calcul pratique du rang Dans le contexte de la proposition précédente, si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une famille génératrice de E, le rang de ϕ est le rang de la famille $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_d))$ de vecteurs de F. Pourquoi ? Donner un exemple à traiter.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Inversibilité automatique

Théorème 23

Soit E et F deux ev de *même* dimension finie, $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$. On a équivalence entre

1. ϕ est un isomorphisme
2. ϕ est injective.
3. ϕ est surjective.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée $n \times n$. On a équivalence entre

1. A est inversible,
2. il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B.A = I_n$,
3. il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A.B = I_n$,
4. $\mathrm{rg}A = n$
5. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$,
6. Les lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Pour les trois premiers points, il s'agit d'une reformulation du théorème précédent appliqué au cas de $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto A.x$.

2.2 Matrices d'applications linéaires

Définir une a.l. par les images de vecteurs d'une base

Théorème 24

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_j)_{j\in J}$ une base. F un espace vectoriel et $(f_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $\forall j \in I, f(e_j) = f_j$.

Démonstration. Par analyse-synthèse. Supposons qu'une telle application existe et soit $x \in E$, ${}^{\mathscr{E}}[x] = (\lambda_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$. On a nécéssairement, par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i.e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i.f_i.$$

Ce qui montre l'unicité sous réserve d'existence.

Définissons alors l'application f par cette formule, on vérifie aisément que f ainsi définie répond à la question, ce qui montre l'existence. $\square$

Matrice d'application linéaire

Proposition 25

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{E}=(e_j)_{j\in J}$ une base de E, $\mathscr{F}=(f_i)_{i\in I}$ une base de F.

1. Etant donnée $\phi\in\mathscr{L}(E,F)$, il existe une unique famille de scalaires $\Phi=(\phi_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ telle que
$$\forall j\in J,\ \phi(e_j)=\sum_{i\in I}\phi_{ij}.f_i$$
2. Réciproquement, étant donnée une famille de scalaires $\Phi=(\phi_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$, il existe une unique $\phi\in\mathscr{L}(E,F)$ vérifiant la relation ci-dessus.

Supposons $I=\{1,\dots,n\}$, $J=\{1,\dots,p\}$, avec $n=\dim F$, $p=\dim E$, on vient d'établir une bijection entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui, à chaque $\phi\in\mathscr{L}(E,F)$ associe sa matrice $\Phi\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *relativement aux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.*

$\boxed{\text{On notera } {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} \text{ ou } \mathrm{Mat}(\phi,\mathscr{E},\mathscr{F}) \text{ cette matrice.}}$

Théorème 26

Cette matrice est caractérisée par la relation fondamentale
$$\forall x\in E,\ {}^{\mathscr{F}}[\phi(x)]={}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}.{}^{\mathscr{E}}[x].$$

Remarque 27. *Si on utilise la notation « habituelle » trouvée dans quelques livres français avec Mat, cette relation s'écrit*
$$Mat(\phi(x),\mathscr{F})=Mat(\phi,\mathscr{E},\mathscr{F}).Mat(x,\mathscr{E})$$
On perd l'aspect graphique à la CHASLES *de la relation et on se trompe systématiquement lors de l'écriture des relations. Ce n'est pas une bonne notation de ce fait.*

Démonstration. Appelons $\Phi={}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$, $n=\dim F$, $p=\dim E$. $\Phi\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\Phi=(\phi_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$. Si x a pour coordonnées ${}^{\mathscr{E}}[x]=(x_1,\dots,x_p)$ relativement à la base $\mathscr{E}$ cela signifie que $x=\sum_{j=1}^p x_j.e_j$ et donc, par linéarité de ϕ, $\phi(x)=\sum_{j=1}^p x_j.\phi(e_j)$. En substituant $\phi(e_j)=\sum_{i=1}^n\phi_{ij}.f_i$, on obtient, après inversion des symboles $\sum$ que
$$\phi(x)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^p x_j\phi_{ij}\right).f_i$$
En d'autres termes, pour $i\in 1,\dots,n$, la i-ième coordonnée de $\phi(x)$ dans la base $\mathscr{F}$ est $\sum_{j=1}^p x_j\phi_{ij}$. Il s'agit **aussi** de la i-ième composante du vecteur $\Phi.{}^{\mathscr{E}}[x]$ et donc
$${}^{\mathscr{F}}[\phi(x)]=\Phi.{}^{\mathscr{E}}[x]$$
□

Construction pratique

On retiendra la recette pratique de construction de la matrice Φ d'une application linéaire $\phi : E \to \mathbb{F}$ relativement aux bases $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et $\mathscr{F}$ de F

$$\Phi = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} = \left({}^{\mathscr{F}}[\phi(e_1)] | \ldots | {}^{\mathscr{F}}[\phi(e_n)] \right)$$

Autrement dit, on calcule les colonnes de coordonnées sur la base $\mathscr{F}$ de chacun des vecteurs $\phi(e_i)$. Φ est obtenue en plaçant ces colonnes côte à côte.

Exercice 7.— Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$.
1. Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver la matrice de f dans les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$:

$$\{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\} \text{ et } \{v_1 = (1,3), v_2 = (1,4)\}.$$

Exercice 8.— Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
1. Calculer l'image par f des vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire la matrice B de l'application f dans la base $\{f_1, f_2\}$.
2. Si un vecteur a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base canonique et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dans la base $\{f_1, f_2\}$. Quelle est la matrice de changement de base P qui permet de calculer $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à partir de $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$? calculer P^{-1}.
3. Montrer que $A = PBP^{-1}$, puis $A^n = PB^nP^{-1}$.
4. Calculer B^n, et en déduire A^n.
5. On définit les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et les relations de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3v_n$, $v_{n+1} = u_n - 2v_n$.
Calculer u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.—
1. Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,1,-1), u_2 = (-1,1,1), u_3 = (1,-2,1).$$

2. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à la base (u_1, u_2, u_3).
3. Soit $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$. Exprimer (y_1, y_2, y_3) en fonction de (x_1, x_2, x_3).
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2y, 5x+3z, -4x-2y-4z)$.
Ecrire la matrice associée de f dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Le théorème du rang

Proposition 28. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathscr{E} = (e_j)_{j\in J}$ une base de E, $\mathscr{F} = (f_i)_{i\in I}$ une base de F, $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\Phi = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ alors, via les applications coordonnées,*

- *$Ker\,\phi$ et $Ker\,\Phi$ sont isomorphes.*
- *$Im\,\phi$ et $Im\,\Phi$ sont isomorphes.*

En particulier le rang de l'application ϕ et le rang de la matrice Φ sont égaux.

Théorème 29: Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F un espace vectoriel, $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$, on a

$$\dim E = \mathrm{rg}(\phi) + \dim \mathrm{Ker}\,\phi$$

Provenance directe de l'algorithme de GAUSS. Exemples d'application.

Matrices et Addition/multiplication par un scalaire

Théorème 30

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Si $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$${}^{\mathscr{F}}[\lambda.\phi + \mu.\psi]_{\mathscr{E}} = \lambda.{}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} + \mu.{}^{\mathscr{F}}[\psi]_{\mathscr{E}}$$

Les opérations à droite de cette égalité étant les opérations $+$ et . du $\mathbb{K}$-ev des matrices $\dim E \times \dim F$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Matrices et Composition

Théorème 31

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$. Si $\phi \in \mathscr{L}(E,F)$, $\gamma \in \mathscr{L}(F,G)$, $\gamma \circ \phi \in \mathscr{L}(E,G)$ et

$${}^{\mathscr{G}}[\gamma \circ \phi]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$$

La multiplication à droite de cette égalité étant une multiplication entre matrices de dimensions compatibles.

Remarque 32. *Si on utilise la notation « habituelle » trouvée dans quelques livres français avec Mat, cette relation s'écrit*

$$Mat(\gamma \circ \phi, \mathscr{E}, \mathscr{G}) = Mat(\gamma, \mathscr{F}, \mathscr{G}).Mat(\phi, \mathscr{E}, \mathscr{F})$$

On perd là encore l'aspect graphique à la CHASLES de la relation et on se trompe systématiquement lors de l'écriture des relations. L'écriture des formules de changement de base en propositions 34, 35 et 36 devient un pur enfer.

Démonstration. On se ramène à la relation du théorème 26 en travaillant colonne par colonne. Donnons ce qui se passe pour la première colonne, les autres colonnes fonctionnant sur le même principe.

— La première colonne de ${}^{\mathscr{G}}[\gamma\circ\phi]_{\mathscr{E}}$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathscr{G}$ (placées en colonne) du vecteur $\gamma(\phi(e_1))$ où e_1 est le premier vecteur de la base $\mathscr{E}$ de E ; Il s'agit donc de ${}^{\mathscr{G}}[\gamma(\phi(e_1))]$. Par la relation du théorème 26, on a

$$ {}^{\mathscr{G}}[\gamma(\phi(e_1))] = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi(e_1)] $$

— En appliquant une deuxième fois la relation du théorème 26, on a

$$ {}^{\mathscr{G}}[\gamma(\phi(e_1))] = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . {}^{\mathscr{E}}[e_1] = {}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} $$

— Notre grande expérience du calcul matriciel indique que ${}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est la première colonne de la matrice ${}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$.

— On vient donc d'obtenir que la première colonne de ${}^{\mathscr{G}}[\gamma\circ\phi]_{\mathscr{E}}$ est la première colonne de ${}^{\mathscr{G}}[\gamma]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$.

□

En exemple fondamental, examinons le cas des matrices inversibles/applications linéaires bijectives.

1. On a vu que si $\mathscr{E}$ est une base de E, de dimension n alors, en notant i_E l'application identité de E, ${}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}} = I_n$;
2. Si $\phi : E \to F$ est une application linéaire bijective, un *isomorphisme* de E sur F, alors
   (a) E et F sont de même dimension, disons n ; Notons $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{F}$ une base de E, resp. de F ;
   (b) $\phi\circ\phi^{-1}(: F \to F) = i_F$ et donc
   $$ I_n = {}^{\mathscr{F}}\left[\phi\circ\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}} = {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}} $$
   (c) $\phi^{-1}\circ\phi(: E \to E) = i_E$ et donc
   $$ I_n = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\circ\phi\right]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} $$
   (d) et donc ${}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible et $({}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}})^{-1} = {}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{F}}$.
3. Réciproquement, si $\phi : E \to F$ est une application linéaire et si ${}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible alors ϕ est un isomorphisme de E sur F.

Matrices d'endomorphismes

Dans le cas où $E=F$, on peut bien sûr prendre $\mathscr{E}=\mathscr{F}$, dans ce cas, si ϕ est un endomorphisme de E, on appelle ${}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ la matrice de ϕ *relativement à la base* $\mathscr{E}$

En exemple fondamental, examinons le cas de l'endomorphisme identité :

1. On a vu que si $\mathscr{E}$ est une base de E, de dimension n alors ${}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}}=I_n$;
2. Si $\phi : E\to E$ est un endomorphisme bijectif, un *automorphisme* de E, alors
$$I_n={}^{\mathscr{E}}\left[\phi\circ\phi^{-1}\right]_{\mathscr{E}}={}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}.{}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{E}}$$
et donc ${}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible et $({}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}})^{-1}={}^{\mathscr{E}}\left[\phi^{-1}\right]_{\mathscr{E}}$.
3. Réciproquement, si $\phi : E\to E$ est un endomorphisme et si ${}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}}$ est une matrice inversible alors ϕ est un automorphisme de E.

Exercice 10.-⋆- On considère les fonctions suivantes, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules

$p(x)=e^x\cos(x)$, $q(x)=e^x\sin(x)$, $r(x)=e^{-x}\cos(x)$ et $s(x)=e^{-x}\sin(x)$.

1. Montrer que ces quatre fonctions forment une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par E le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.
2. On désigne par $D:\mathscr{C}^\infty\to\mathscr{C}^\infty$ l'application $f\mapsto f'$. Montrer que D, restreinte au sous-espace E, est une application linéaire de E dans lui-même, i.e un endomorphisme.
3. Écrire la matrice M de la restriction de D à E, dans la base (p,q,r,s).
4. Calculer l'inverse de M, et en déduire une primitive de $f(x)=e^x(2\cos(x)+\sin(x))+e^{-x}(\cos(x)-\sin(x))$.

Exercice 11.— On définit une l'application $u:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$ par
$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\, u(P)=X.P'(X)-P(X)$$
1. Montrer que u est linéaire.
2. u est-elle injective ?
3. Soit $N\in\mathbb{N}^*$; Montrer que, par restriction, u définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.
4. Donner sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.

Exercice 12.-⋆- On considère $E=\mathbb{R}_d[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{M}_d$.

Pour chacune des formules suivantes, vérifier qu'elle définit bien un endomorphisme de E et donner sa matrice relativement à $\mathscr{M}_d$.
1. $D(P)=P'$
2.a. $S_+(P)=P(X+1)$
2.b. $S_-(P)=P(X-1)$
2.c. $S_+\circ S_-$.
2.d. Quelles relations « miraculeuses » sur les coefficients binomiaux vient-on d'obtenir ?
3. $f(P)=X(P(X+1)-P(X-1))$.

Exercice 13.— Soit le $\mathbb{R}$-ev $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $u:E\to\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par
$$\forall f\in E,\quad u(f):\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&f''(x)+f'(x)+f(x)\end{array}$$
1. Montrer que u est linéaire.

2. Montrer que par restriction de l'image elle définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau F, en donner une base $\mathscr{F}$ et la dimension.
4. Montrer que l'application $D : E \to E$, définie par $\forall f \in E, D(f) = f'$ se restreint en un endomorphisme de F et en donner la matrice relativement à la base $\mathscr{F}$.

Exercice 14.— Soit $E = \mathbb{R}^N$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et $\phi : E \to E$ définie par

$$\forall u, v \in E, v = \phi(u) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)$$

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer son noyau F, en donner une base $\mathscr{F}$ et la dimension.
3. Montrer que l'application $D : E \to E$, définie par $\forall u \in E, D(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ se restreint en un endomorphisme de F et en donner la matrice relativement à la base $\mathscr{F}$.

Exercice 15.—
Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = f \circ f = 0$.
1. Démontrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En déduire $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Généraliser ce résultat pour $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0$.

Exercice 16.— Montrer que pour $\phi \in \mathscr{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, ${}^{\mathscr{E}}[\phi^n]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}[\phi]^n_{\mathscr{E}}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, donner une relation naturelle entre ${}^{\mathscr{E}}[P(\phi)]_{\mathscr{E}}$ et $P({}^{\mathscr{E}}[\phi]_{\mathscr{E}})$.

Matrice de passage

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E. On considère la matrice P dont les colonnes sont constituées des coordonnées de chaque vecteur de $\mathscr{E}'$ dans la base $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on a donc

$$P = \left({}^{\mathscr{E}}[e'_1] \,|\, \ldots \,|\, {}^{\mathscr{E}}[e'_n]\right)$$

1. P est la matrice, relativement à la base $\mathscr{E}$ de l'endomorphisme qui, pour tout i, envoie e_i sur e'_i. C'est la *matrice de passage* de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$.
2. P est la matrice, relativement à la base $\mathscr{E}'$ au départ et $\mathscr{E}$ à l'arrivée de l'identité de E.

$$P = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'}$$

Propriétés des matrices de passage

Proposition 33

La matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$ est inversible, d'inverse la matrice de passage de $\mathscr{E}'$ à $\mathscr{E}$.

Démonstration. Notons P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, P' la matrice de passage de $\mathscr{E}'$ à $\mathscr{E}$.

$$I_n = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}} = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'} . {}^{\mathscr{E}'}[i_E]_{\mathscr{E}} = P.P'$$

En échangeant les rôles de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, on a aussi $I_n = P'.P$. □

Formules de changement de base : vecteurs

Proposition 34

Soit E un $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases (indicées de 1 à n) de E, P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$. Pour tout $x \in E$, notons X, resp. X' le vecteur de ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{E}'$. On a

$$X = P.X'$$

Démonstration. $X = {}^{\mathscr{E}}[x] = {}^{\mathscr{E}}[i_E(x)] = {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'} . {}^{\mathscr{E}'}[x] = P.X'$ □

Formules de changement de base : matrices

Proposition 35

Soient E, F deux espaces de dimension finie, $\phi : E \to F$ une application linéaire, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ deux bases de E, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ deux bases de F, Φ, resp. Φ' les matrices de ϕ relativement à $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, resp. $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{F}'$, P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, Q la matrice de passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$. On a alors

$$\Phi' = Q^{-1}.\Phi.P$$

Démonstration. $\Phi' = {}^{\mathscr{F}'}[\phi]_{\mathscr{E}'} = {}^{\mathscr{F}'}[i_F \circ \phi \circ i_E]_{\mathscr{E}'} = {}^{\mathscr{F}'}[i_F]_{\mathscr{F}} . {}^{\mathscr{F}}[\phi]_{\mathscr{E}} . {}^{\mathscr{E}}[i_E]_{\mathscr{E}'} = Q^{-1}.\Phi.P$ □

Formules de changement de base : matrices d'endomorphismes

Proposition–Définition 36

Soient E de dimension finie, $\phi : E \to E$ un endomorphisme, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ deux bases de E, Φ, resp. Φ' les matrices de ϕ relativement à $\mathscr{E}$, resp. $\mathscr{E}'$, P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$. On a alors

$$\Phi' = P^{-1}.\Phi.P$$

Deux matrices Φ et Φ' liées par une telle relation sont dites *semblables*. Deux matrices semblables représentent la même application linéaire relativement à des bases éventuellement distinctes

La philosophie du changement de base est, partant d'une matrice A *a priori* sans trop de structure visible, de trouver une/des base/s *adaptée/s* à A telle/s que $A' = Q^{-1}.A.P$ possède une structure simple.

A contrario, une application linéaire intéressante, géométriquement parlant, a souvent une structure très simple dans une base non standard mais adaptée à la situation. On peut alors construire sa matrice dans une base standard.

Voir les cours à venir sur la réduction/diagonalisation des endomorphismes.

Exercice 17.— Soit, dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$, la base canonique et les vecteurs

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les matrices de passages entre ces deux bases.
2. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{F}$ est

$$\Phi = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2.a. Donner la matrice Φ' de ϕ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2.b. Quel est le rang de ϕ ?
2.c. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Ker}\,\phi$

Exercice 18.— Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\0 & -3 & -2\\0 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (1, X - 2X^2, 1 - 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathscr{C}$ par la formule de changement de base.

Exercice 19.—
1. Soit, pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, e_k(t) = e^{ik.t}$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_n := (e_{-n}, .., e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Dimension de $\mathrm{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.
2. Montrer que l'application D^2 définie comme endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), D^2(f) = f''$$

se restreint en un endomorphisme de $\mathrm{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$ et donner sa matrice relativement à cette base.
3. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, resp. pour $k \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, resp. $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, c_k(t) = \cos(k.t), \text{ resp.} \forall t \in \mathbb{R}, s_k(t) = \sin(k.t), \text{ resp.}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{C}_n = (c_k, k \in \{0, \ldots, n\}), \mathscr{S}_n = (s_k, k \in \{1, \ldots, n\}), \mathscr{C}\mathscr{S}_n = \mathscr{C}_n \# \mathscr{S}_n$$

3.a. Montrer que $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$ est une base de $\mathrm{Vect}\langle\mathscr{E}_n\rangle$.
3.b. On prend $n = 3$. Donner P la matrice de passage de $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$ vers $\mathscr{E}_n$ et son inverse.
3.c. On prend $n = 3$. Donner la matrice de D^2 relativement à la base $\mathscr{C}\mathscr{S}_n$.

Exercice 20.— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ et on considère la base de FOURIER, $\mathscr{F} = (e_k)_{k\in\{0,\dots,n-1\}}$ où e_k est le vecteur dont la coordonnée d'indice ℓ est $e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}}$. (ici i est le nombre complexe bien connu, pas un indice entier !)
1. Donner F, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ à la base $\mathscr{F}$, et, après avoir calculé $\overline{F}^\top.F$, son inverse.
2. On se donne un vecteur $a \in \mathbb{C}^{\{0,\dots,n-1\}}$ et on considère une matrice A carrée d'ordre n, indicée par $\{0,\dots,n-1\}\times\{0,\dots,n-1\}$ dont le coefficient à la place (k,ℓ) est $a_{k-\ell}$ lorsque $k \geq \ell$ et $a_{n+k-\ell}$ lorsque $k < \ell$.
2.a. Représenter schématiquement une telle matrice A. On appelle une telle matrice une matrice cyclique, pourquoi ?
2.b. On considère l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Calculer directement sa matrice dans la base $\mathscr{F}$.
2.c. Quelle relation matricielle donne le calcul effectué dans la question précédente ?

Exercice 21.—
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, muni d'une base $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_n)$.
1. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire, i.e une application linéaire $e_k^* : E \to \mathbb{K}$ telle que $e_k^*(e_\ell) = 0$ si $\ell \neq k$ et $e_k^*(e_k) = 1$. On pourra se contenter d'exhiber sa matrice relativement aux bases $\mathscr{E}$ de E et (1) de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{E}^* = (e_1^*,\dots,e_n^*)$ forme une base de E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. (on pourra montrer que cet espace a même dimension que E en exhibant un isomorphisme avec un espace de matrices adéquat).
3. Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathscr{E}$. On considère

$$\phi^* : E^* \to E^*, \ell \mapsto (x \in E \mapsto \ell(\phi(x)))$$

Quelle est la matrice de ϕ^* relativement à la base $\mathscr{E}^*$?

3 Diagonalisation des endomorphismes, des matrices

On a vu les principaux théorèmes concernant la diagonalisation des matrices. Ceux-ci se transfèrent *verbatim* aux endormorphismes en dimension finie.

Théorème 37. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalentes les assertions suivantes :*

1. *f est diagonalisable, i.e. il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;*
2. *Il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que ${}^{\mathscr{E}}[f]_{\mathscr{E}}$ est diagonale.*
3. *Il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que ${}^{\mathscr{E}}[f]_{\mathscr{E}}$ est diagonalisable.*
4. *Pour toute base $\mathscr{E}$ de E la matrice ${}^{\mathscr{E}}[f]_{\mathscr{E}}$ est diagonalisable.*

On a en particulier la caractérisation commune des endomorphismes diagonalisables en dimension finie/ des matrices carrées diagonalisables :

Théorème 38

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $f \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_i.\mathrm{id}_E) = n$$

Théorème 39

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \operatorname{Ker}(M - \lambda_i.I_n) = n$$

Dans les deux cas, en ne conservant dans les sommes que les λ_i effectivement valeurs propres de f ou M, s'il y a égalité à n, c'est que la somme se fait en énumérant TOUS les éléments du spectre. Le spectre de f ou M ne contient pas plus de n valeurs propres.

⋆⋆⋆

Fil rouge : interpolation de LAGRANGE Revenons à l'exemple de l'interpolation de LAGRANGE associée aux points $(z_0, \ldots, z_{d+1})$ et donc l'application $\Lambda : \mathbb{C}_d[X] \to \mathbb{C}^{d+1}$, $P \mapsto (P(z_0), \ldots, P(z_1))$. La matrice de cette application relativement à $\mathscr{M}_d$, la base canonique de $\mathbb{C}_d[X]$ et $\mathscr{C}_{d+1}$, la base canonique de $\mathbb{C}^{d+1}$ est

$$V := {}^{\mathscr{C}_d}[\Lambda]_{\mathscr{M}_d} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \ldots & z_0^d \\ 1 & z_1 & \ldots & z_1^d \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & z_d & \ldots & z_d^d \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle la matrice de VANDERMONDE associée aux points $(z_0, \ldots, z_d)$. Dans le cas où les points sont distincts, ce que nous avons prouvé, via, le caractère isomorphique de l'application Λ est que cette matrice est inversible.

On vient donc de prouver, sans douleur, que, dans $\mathbb{C}^{d+1}$, les $d+1$ vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ z_i \\ \vdots \\ z_i^d \end{pmatrix}$ forment une famille libre.

Quelle est l'inverse de V ? Ici, un pivot de GAUSS peut s'avérer hasardeux et l'interprétation polynômiale va nous aider. On a vu que

$$\Lambda^{-1}(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i.L_i$$

où les L_i sont les polynômes de LAGRANGE associés aux points $(z_0, \ldots, z_d)$.

On a donc $V^{-1} = {}^{\mathscr{M}_d}\left[\Lambda^{-1}\right]_{\mathscr{C}_d}$. La colonne j de V^{-1} est donc constituée des coefficients du polynôme L_j, coordonnées de ce polynôme dans la base des monômes $\mathscr{M}_d$.

D'un autre point de vue, considérons la matrice de passage de la base $\mathscr{L}$ des polynômes de LAGRANGE à la base canonique $\mathscr{M}_d$ de $\mathbb{C}_d[X]$. Cette matrice de passage est V, elle est donc inversible et V^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{M}_d$ à la base $\mathscr{L}$. On retrouve la même formule pour V^{-1}.

Traitons le cas $d = 2$. On a

$$L_0(X) = \frac{(X-z_1)(X-z_2)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} = \frac{1}{D_0}(X^2-(z_1+z_2)X+z_1.z_2), L_1(X) = \ldots,$$

et donc $V^{-1} =$

$$\frac{1}{D}\begin{pmatrix} (z_2-z_1).z_1.z_2 & (z_0-z_2).z_2.z_0 & (z_1-z_0).z_0.z_1 \\ -(z_2-z_1).(z_1+z_2) & -(z_0-z_2).(z_2+z_0) & -(z_1-z_0).(z_0+z_1) \\ (z_2-z_1) & (z_0-z_2) & (z_1-z_0) \end{pmatrix}$$

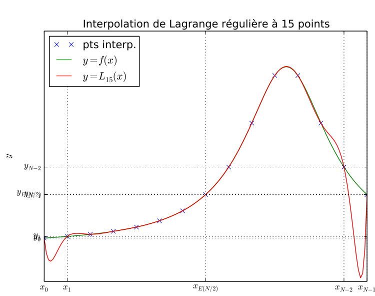
avec $D = (z_0-z_1)(z_1-z_2)(z_2-z_0)$

On termine par deux séries de graphiques illustrant le problème de l'interpolation.

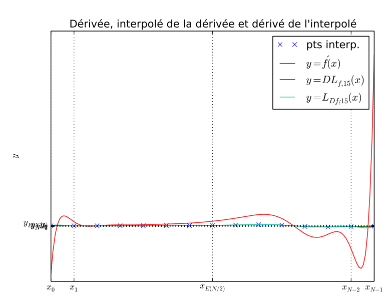
Chacune des deux séries de figures est composée de la façon suivante

1. On prend $N = 15$ points $(x_i)_{i=0,..,N-1}$ du segment $[-1,-1]$, on prend pour valeurs $(y_i)_{i=0,..,N-1} = (f(x_i))_{i=0,..,N-1}$ où $f(x) = \frac{1}{1+10(x-\frac{1}{2})^2}$ et on construit le polynôme P de degré au plus $N-1$ dont le graphe passe par les couples (x_i, y_i).
2. On trace le graphe de ce polynôme et celui de la fonction f
3. On trace le graphe de f', celui de P' ainsi que le graphe du polynôme Q interpolation de f' aux points x_i

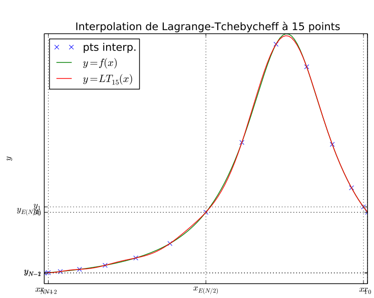
Utiliser le script `exemple-fil-rouge.py`.



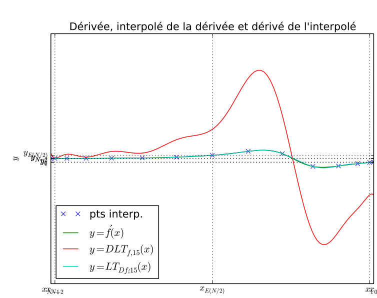
(a) ...uniformément. f et interpolé P



(b) ...uniformément. f', P', interpolé de f'



(c) ...à la TCHEBYCHEFF. f et interpolé P



(d) ...à la TCHEBYCHEFF. f', P', interpolé de f'

FIGURE 1 – Interpolation et dérivation. $N = 15$ points de $[-1,1]$, répartis...