Programme de Colles 03

Fonctions de deux variables réelles, Révisions Probabilités, chaînes de MARKOV, variables aléatoires uniformes
09/10–21/10

PROGRAMME

Informatique

— Calcul numérique en statistiques descriptives : moyenne, variance, covariance, formule de la droite de régression.

⋆⋆⋆

— Simulations probabilistes : simulation (à l'aide de v.a. uniformes sur $[0,1]$) de v.a prenant un nombre fini de valeurs, application aux chaînes de MARKOV.

Fonctions réelles de deux variables réelles

Fonctions numériques de deux variables réelles. Un point de vue pragmatique. Tout le chapitre.

Révisions de probabilités BCPST1 : Probabilité, v.a. à support fini, transition vers les probabilités de BCPST2

— Loi d'une v.a. à support fini. V.a. à valeurs réelles, à valeurs couples, couples de v.a. Exemple des v.a. uniformes, de BERNOULLI (indicatrices d'événements). Histogrammes
— Espérance, formule de transfert, variance
— Utilisation du *polynôme générateur des moments* [1] pour une v.a. à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$
— Inégalités de MARKOV, de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEV, de CAUCHY-SCHWARZ.
— Lois de couples. Lois marginales.
— Indépendance et espérance, covariance, droite de régression linéaire.

⋆⋆⋆

— Définition d'un espace probabilisé [2] $(\Omega,\mathscr{T},\mathbb{P}))$, d'une v.a. X définie sur un tel espace. V.a. uniforme sur $[0,1]$
— Chaînes de MARKOV. Description par graphe, établissement de la formule de récurrence, simulation informatique.
Nous ferons à cette occasion quelques rappels sur les questions de probabilités conditionnelles, cependant des questions de niveau première année sur ces questions peuvent être posées dès la première semaine.

Utilisation des fonctions indicatrices d'ensembles

Intégrales généralisées

— Intégrale convergente ou divergente sur un intervalle ouvert.
— Exemples élémentaires, fonctions de références.

QUESTIONS DE COURS

1. Informatique sur machine : ecrire une fonction `DteRegression(x,y)` qui étant donnée deux listes `x`,`y` (ou tableaux numpy 1D) de même taille retourne les coefficients a et b de la droite de régression de `y` sur `x`. Application au dessin (avec `plt.plot`) du nuage des points (x,y) et de la droite de régression $y = ax+b$ des séries statistiques données par $x =$ `np.linspace(0,np.pi,100)`, $y =$ `np.sin(x)`.
2. Etablir, par recherche de point critique, les formules $a = \frac{cov(x,y)}{var(x)}$, $b = \overline{y} - a.\overline{x}$ pour la régression linéaire $\hat{y} = a.x+b$ étant donnée une série statistique bivariée $(x,y) = (x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}$.
3. Calcul de l'espérance et de la variance pour la loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$ via la technique du polynôme générateur
4. Calcul de l'espérance et de la variance pour la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ via la technique du polynôme générateur
5. Enoncer et démontrer [3] les inégalités de MARKOV puis BIENAYMÉ–TCHEBYCHEV.
6. Enoncer et démontrer l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ.

⋆⋆⋆

1. Définition et pptés hors programme, $f(t) = \mathbb{E}(t^X)$ à rappeler au début d'un exercice
2. Aucune question théorique sur ce sujet ne peut être posée
3. Aucune question d'existence des espérances/variance n'est à soulever

7. Informatique sur machine : Simuler informatiquement, sur un exemple concret, une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs (numériques ou pas) et tracer l'histogramme de simulation sur un grand nombre de valeurs. On demande notamment de savoir simuler en Python, à partir de la fonction `numpy.random.rand()` :
   (a) une variable binomiale comme somme de v.a. de BERNOULLI indépendantes;
   (b) une v.a uniforme sur $\{0,\dots,N-1\}$;
   (c) une v.a. à valeurs dans $\{0,\dots,N-1\}$ dont la loi est donnée par un vecteur de probabilité $(p_k)_{k\in\{0,\dots,N-1\}}$;
8. Informatique sur machine : Simuler informatiquement [4] une chaîne de MARKOV décrite par son graphe de transition. Savoir tracer l'histogramme obtenu par simulation de la position à la 100^e itération.
9. Utilisation de fonctions indicatrices pour démontrer une identité ensembliste, par exemple [5] $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
10. (Si fait le mercredi 11/10) Enoncé de la définition d'une intégrale convergente ou divergente et nature d'une IG dans les cas de référence et élémentaires.

Pour la première semaine, ne sont au programme que les points avant les $\star\star\star$.

Les questions **Informatique sur machine** nécessitent que vous apportiez au moins une machine par groupe de colle avec une installation Spyder/Python fonctionnelle, ouverte au début de la colle.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE : Intégrales généralisées, la totale

4. On peut utiliser la fonction `numpy.random.choice()`.
5. NB : la différence symétrique est hors programme BCPST2, elle est définie par $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.