

Programme de Colles 04

Chaînes de MARKOV, intégrales généralisées, variables aléatoires uniformes et à densité
06/11–17/11

PROGRAMME

Informatique

— Simulations probabilistes : simulation (à l'aide de v.a. uniformes sur $[0, 1]$) de v.a. prenant un nombre fini de valeurs, application aux chaînes de MARKOV.

— Graphes : codage par dictionnaire/matrice d'adjacence
— Création et utilisation de dictionnaires.

Révisions de probabilités BCPST1 : v.a. à support fini ; Probabilités BCPST2 : v.a à densité

— cf. Programme précédent.
— Définition d'un espace probabilisé¹ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d'une v.a. X définie sur un tel espace.
— Chaînes de MARKOV. Description par graphe, établissement de la formule de récurrence, simulation informatique.

— V.a. uniforme sur $[0, 1]$, caractéristiques
— Densité de probabilité, V.a à densité, fonction de répartition et formule de transfert.

Intégrales généralisées

— Intégrale convergente ou divergente sur un intervalle ouvert, Exemples élémentaires, fonctions de références. CHASLES
— Théorème de comparaison pour les intégrales à intégrande positive (par inégalités), Intégrales absolument convergentes.

— Théorème de comparaison (par équivalence)
— Linéarité, positivité, croissance pour les IG,
— Intégration par parties, changement de variable.

QUESTIONS DE COURS ET IDÉES D'EXERCICES

1. Informatique sur machine : Simuler informatiquement² une chaîne de MARKOV décrite par son graphe de transition. Savoir tracer l'histogramme obtenu par simulation de la position à la 100^e itération.
2. Définition d'une IG convergente ou divergente : nature et valeur d'une IG dans un cas de référence ou élémentaire.
3. Enoncé du théorème de comparaison pour les intégrales à intégrande positive, application dans un cas élémentaire au choix de l'interrogateur/interrogatrice.
4. Enoncé du théorème $ACV \Rightarrow CV$, application dans un cas élémentaire au choix de l'interrogateur/interrogatrice.
5. Convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln x \, dx$, application à la convergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(x) \, dx$.
6. Nature et valeur d'une IG par i.p.p. ou changement de variable « classiques », en revenant aux intégrales partielles.

7. Enoncé du théorème d'intégration par parties généralisé. Application dans un cas élémentaire.
8. Enoncé du théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées. Application dans un cas élémentaire.
9. Caractéristiques des v.a. $\mathcal{U}_{[0,1]}$: formule de transfert, espérance, variance, fonction de répartition.
10. Définition d'une densité de probabilité sur \mathbb{R} , exemple au choix de l'interrogateur/interrogatrice.

Pour la première semaine, ne sont au programme que les points avant les ***.

Les questions **Informatique sur machine** nécessitent que vous apportiez au moins une machine par groupe de colle avec une installation Spyder/Python fonctionnelle, ouverte au début de la colle.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE : Probabilités, variables aléatoires à densité, la totale.

1. Aucune question théorique sur ce sujet ne peut être posée
2. On peut utiliser la fonction `numpy.random.choice()`.