Programme de Colles 05

Variables aléatoires uniformes et à densité
20/11–01/12

PROGRAMME

Informatique

- Graphes : codage par dictionnaire/matrice d'adjacence
- Création et utilisation de dictionnaires.

Probabilités BCPST1&2

- *cf.* Programme précédent.
- Densité de probabilité, V.a à densité, fonction de répartition et formule de transfert. Espérance, variance, moments.
- Loi classiques et leurs caractéristiques, espérance, variance, fonction de répartition : uniforme sur un intervalle $\mathscr{U}_{[a,b]}$, exponentielle, $\mathscr{E}(\lambda)$, loi normale $\mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$.
- Exemples de calculs de la densité de $Y = f(X)$ connaissant la loi de X et la fonction f (cas f est monotone, $\mathscr{C}^1$.)
- CS sur la f. de répartition d'une v.a. réelle pour que celle-ci soit à densité. Calcul de la densité par dérivation.
- Utilisation de la formule $X = F_X^{-1}(U)$ pour simuler une v.a X de densité donnée à l'aide de $U \sim \mathscr{U}_{]0,1[}$. Existence de v.a. à fonction de répartition imposée. Fonction des quantiles.

$\star\star\star$

- Densité de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ pour X et Y indépendantes, à densité. Extension à des familles de v.a.
- Densité de $Z = X+Y$ pour X et Y indépendantes, à densité. Formule du produit de convolution. Le cas Gaussien.
- Dans le cadre des variables à densité : Inégalité de MARKOV ; inégalité de CAUCHY–SCHWARZ, Variance, covariance, inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF ;
- Théorèmes limite : Loi faible des grands nombres, Utilisation(s) en simulation. Théorème central limite.

QUESTIONS DE COURS ET IDÉES D'EXERCICES

1. Caractéristiques des v.a. $\mathscr{U}_{[0,1[}$: formule de transfert, espérance, variance, fonction de répartition.
2. Définition d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, exemple au choix de l'interrogateur/interrogatrice. Calcul de fonction de répartition, de moments.
3. Calcul de la loi d'une v.a. fonction continue, strictement monotone d'une variable uniforme ou de densité connue, sur le modèle de $-\ln U$ ou de U^2 faits en cours. Méthodes de la fonction de répartition, méthode la formule de transfert générique.
4. Démonstration du fait qu'une v.a. exponentielle satisfait la propriété d'absence de mémoire (définition de cette propriété).
5. Informatique machine : Simuler informatiquement [1] une v.a. réelle de loi imposée, donnée par sa fonction de répartition. Histogramme d'un échantillon simulé, graphe de la densité
6. Définition, espérance, variance d'une v.a uniforme sur un intervalle $]a,b[$. Calcul de sa fonction de répartition.
7. Définition, espérance, variance d'une v.a exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calcul de sa fonction de répartition.
8. Définition d'une v.a. normale $\mathscr{N}\left(m,\sigma^2\right)$. Calculs de l'espérance et variance (en se ramenant par i.p.p à l'intégrale gaussienne.) d'une v.a. normale $\mathscr{N}(0,1)$.

$\star\star\star$

9. Calcul des lois de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ où X et Y, à densité, sont indépendantes : Exemple avec $X,Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$.
10. Formule du produit de convolution :Loi de la somme de deux v.a. $\mathscr{N}(0,1)$, indépendantes.
11. Formule du produit de convolution :Loi de la somme de deux v.a. uniformes sur $[-1,+1]$, indépendantes.
12. Enoncé et démonstration de l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans le cadre des variables à densité. Problème de l'existence des espérances concernées.

Pour la première semaine, ne sont au programme que les points avant les $\star\star\star$.

Les questions **Informatique sur machine** nécessitent que vous apportiez au moins une machine par groupe de colle avec une installation Spyder/Python fonctionnelle, ouverte au début de la colle.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE : Révisions suites, suites récurrentes, nouveauté :séries.

1. avec la fonction `numpy.random.rand()`.