Programme de Colles 06

Variables aléatoires à densité/Suites/Séries
04/12–15/12

PROGRAMME

Informatique

— Simulation de v.a. à densité. Représentation graphique d'histogramme d'échantillon, lien avec le graphe de la densité.

Probabilités BCPST1&2

— *cf.* Programme précédent.
— Densité de $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ pour X et Y indépendantes, à densité. Extension à des familles de v.a.
— Densité de $Z = X+Y$ pour X et Y indépendantes, à densité. Formule du produit de convolution. Le cas Gaussien.
— Dans le cadre général et des variables à densité : inégalité de CAUCHY–SCHWARZ, Variance, covariance [1] ;

Révisions suites, suites récurrentes

— Révisions de première année concernant les suites : définitions et propriétés élémentaires ((dé)croissance, bornes, limites, équivalents classiques), suites classiques (Arithmétiques/Géométriques/A-G, récurrences linéaires d'ordre 2).
— Sommes de termes consécutifs de telles suites ;
— Principes d'étude d'une suite récurrente réelle du type $u_{n+1} = f(u_n)$; notion d'intervalle stable par f.

⋆⋆⋆

Séries

— Série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de terme général « u_n » , Séries convergentes, définitions, divergence grossière.
— Séries géométriques, géométriques dérivées $\sum_{n\geq 0} n.q^{n-1}$, $\sum_{n\geq 0} n(n-1).q^{n-2}$, télescopiques, de t.g. $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$
— Le théorème de comparaison pour les séries à termes ≥ 0, le théorème « équivalence/nature » ;
— Exemples de référence officiels : séries géométriques, série harmonique, série de RIEMANN numéro 2 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$;
— Critère de convergence absolue, exemples
— Série exponentielle, convergence et valeur de la somme.

QUESTIONS DE COURS ET IDÉES D'EXERCICES

1. Informatique sur machine : Simulation d'une variable aléatoire à densité connaissant sa fonction de répartition. Exemple au choix de l'interrogatrice ou interrogateur.
2. Calcul de lois de $\min(X_1,\ldots,X_n)$ ou $\max(X_1,\ldots,X_n)$ où $(X_1,\ldots,X_n)$ est une famille de v.a mutuellement indépendantes. Exemple avec $X_k \sim \mathscr{E}(\lambda)$.
3. Formule du produit de convolution :Loi de la somme de deux v.a. $\mathscr{N}(0,1)$, indépendantes. Formule pour des variables normales de moyenne et variances quelconques.
4. Formule du produit de convolution :Loi de la somme de deux v.a. uniformes sur $[-1,+1]$, indépendantes.
5. Formule du produit de convolution :Loi de la différence de deux v.a. $\mathscr{E}(\lambda)$ indépendantes.
6. Enoncé et démonstration de l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ dans le cadre général. Problème de l'existence des espérances concernées. Expression de cette inégalité pour majorer $|\mathbb{E}(Y.Z)|$ dans le cas où $Y = g(X)$, $Z = h(X)$ et X est une v.a. de dennsité f.
7. Résolution d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
8. En trouvant trois suites géométriques de raisons distinctes vérifiant la récurrence d'ordre 3

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n,$$

donner une expression pour la suite u vérifiant cette récurrence et vérifiant de plus $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et $u_2 = 14$.

1. Les inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF n'ont pas été spécifiquement revues, elles sont bien sûr connues de toutes et tous

$\star\star\star$

9. Sur un exemple relativement simple, mise en oeuvre du thm de comparaison pour les séries à termes positifs, éventuellement suivi du théorème $ACV \Rightarrow CV$ et éventuellement précédé d'une comparaison asymptotique.
10. Mise en oeuvre, sur un exemple simple, de la tehcnique de comparaison à une intégrale généralisée. Dessins.
11. Valeurs des sommes de séries géométriques dérivées première et seconde.
12. Valeurs des sommes de la série exponentielle, de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et de $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Pour la première semaine, ne sont au programme que les points avant les $\star\star\star$.

Les questions **Informatique sur machine** nécessitent que vous apportiez au moins une machine par groupe de colle avec une installation Spyder/Python fonctionnelle, ouverte au début de la colle.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE, L'ANNÉE PROCHAINE : V. aléatoires discrètes, v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

Pas de colles la semaine avant les vacances!!!!