Programme de Colles 07

Séries, Variables aléatoires discrètes
08/01–19/01

PROGRAMME

Informatique

- Calcul des termes d'une suite récurrente réelle d'ordre 1 en vue du tracé.
- Recherche par dichotomie d'une solution d'une équation du type $f(x) = y$ d'iconnue réelle x où f est à valeurs réelles.

Séries

- *cf.* Programme précédent.

Probabilités BCPST1&2

- *cf.* Programme précédent.

Variables aléatoires discrètes

1. Généralités : Formule des probabilités totales dénombrable, v.a. discrètes numériques *a.k.a* variables aléatoires numériques à valeurs dans un ensemble dénombrable, loi, existence d'espérance (intégrabilité) et CVA de la série associée, formule de transfert, existence de variables à loi imposée. Simulation informatique générique de telles variables.
2. Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$. Définition comme loi du rang du premier succès dans un schéma de BERNOULLI i.i.d.. Loi, espérance, variance, formule de transfert.
3. Loi de POISSON de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$, notée $\mathscr{P}(\lambda)$. Présentation comme loi limite de binomiales $\mathscr{B}\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$ avec $N \to +\infty$ et espérance constante, valant λ. Loi, espérance, variance. formule de transfert.
4. Compléments sur les séries ACV : sommation par paquets.
5. Loi de la somme de deux v.a. de POISSON indépendantes.
6. Loi de la somme de deux v.a. géométriques indépendantes.

⋆⋆⋆

7. Loi de la somme : cas indépendants (convolution discrète) et non-indépendant par décomposition suivant les valeurs de l'une des composantes.
8. Couples de variables aléatoires à valeurs entières, v.a. à valeurs $\mathbb{N}^2$. Loi, espérance d'une composante, variance, covariance du couple. Lois marginales, loi conditionnelles, critère d'indépendance des composantes.

QUESTIONS DE COURS ET IDÉES D'EXERCICES

1. Description de la loi, valeurs de l'espérance et de la variance d'une v.a. $\mathscr{G}(\mathbb{N}^*, p)$. Fonctions de répartition et d'anti-répartition.
2. Description de la loi, valeurs de l'espérance et de la variance d'une v.a. $\mathscr{P}(\lambda)$.
3. Enoncé correct et démonstration du fait qu'une binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec n grand et $p = \frac{\lambda}{n}$ est proche, en loi d'une v.a. POISSON $\mathscr{P}(\lambda)$.
4. Simulation informatique d'une variable géométrique (partie entière d'une v.a. exponentielle),
5. Simulation informatique d'une variable de POISSON (par binomiale $\mathscr{B}\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$).
6. Informatique : Dichotomie. Ecriture d'une fonction générique `Dichotomie(f,a,b,y,epsilon=0.001)` retournant une valeur approchée à `epsilon` près de l'équation `f(x)` $=$ `y` d'inconnue $x \in [$`a`,`b`$]$ et application à un exemple simple.
7. Informatique : Savoir calculer les premiers termes d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et représenter sur un même graphe la courbe d'équation $y = f(x)$, la première bissectrice et la suite finie de points de coordonnées $(u_n, u_{n+1}), n \in \{0, \ldots, N\}$.

⋆⋆⋆

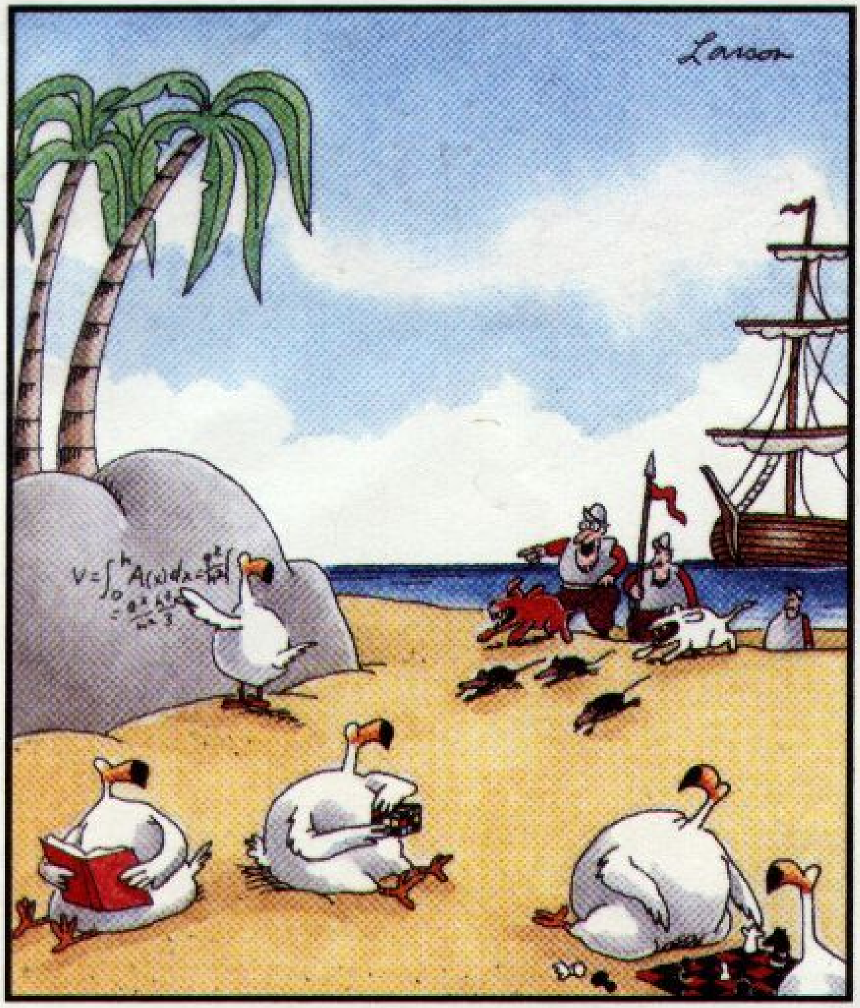
8. Démonstration du fait (stabilité par somme de la loi de POISSON) que si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, X et Y indépendantes alors $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$
9. Vérifier sur un exemple simple qu'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou une suite « double » $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est la loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou d'une v.a. Z à valeurs dans $\mathbb{N}^2$.
10. Calcul sur un exemple simple, pour un couple de variables aléatoires à valeurs $\mathbb{N}$, des lois marginales, des lois conditionnelles et test d'indépendance.

Pour la première semaine, ne sont au programme que les points avant les $\star\star\star$.

Les questions **Informatique sur machine** nécessitent que vous apportiez au moins une machine par groupe de colle avec une installation Spyder/Python fonctionnelle, ouverte au début de la colle.

PRÉVISIONS POUR LA QUINZAINE SUIAVNTE, L'ANNÉE PROCHAINE : Equations différentielles, Révisions nombres complexes et polynômes.

BONNES FÊTES, BONNE ANNÉE !



Unbeknownst to most ornithologists, the dodo was actually a very advanced species, living alone quite peacefully until, in the 17th century, it was annihilated by men, rats, and dogs. As usual.