Lycée Pierre-Gilles de Gennes — **BCPST**
Mathématiques — **2023-2024**

Programme de Colles 08

Suites récurrentes/ Equations différentielles
22/01/2023–02/02/2023

PROGRAMME

Suites : révisions

- Résolution des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique ; résolution d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : principe de superposition ; recherche de suites particulières satisfaisant la récurrence. Sommes.
- Principes d'étude d'une suite récurrente réelle du type $u_{n+1} = f(u_n)$; notion d'intervalle stable par f.
- Schéma d'EULER et résolution approchée d'un problème de CAUCHY (EDO d'ordre 1 avec condition initiale).

Informatique/Calcul scientifique

- Calcul des termes d'une suite récurrente réelle d'ordre 1 en vue du tracé.
- Recherche par dichotomie d'une solution d'une équation du type $f(x) = y$ d'inconnue réelle x où f est à valeurs réelles.

Equations différentielles ordinaires

- Révisions : EDO linéaire du premier ou second[1] ordre à coefficients constants.
- Révisions : EDO linéaire scalaire du premier ordre : variation de la constante.
- EDO se ramenant à une EDO linéaire via un changement de fonction inconnue.
- Principe du schéma d'EULER associé à une EDO du premier ordre, scalaire ou vectorielle.
- Equations du premier ordre à variables séparées (Exemples de résolution).
- Transformation d'une EDO scalaire d'ordre $p \geq 2$ en système d'EDO d'ordre 1.
- Systèmes conservatifs. (*i.e.* admettant une « énergie », constante du mouvement)
- Exemples variés issus de la physique, chimie ou de la biologie.

QUESTIONS DE COURS

1. Dichotomie. Ecriture d'une fonction générique `Dichotomie(f,a,b,y,epsilon=0.001)` retournant une valeur approchée à `epsilon` près de l'équation `f`$(x) =$ `y` d'inconnue $x \in [\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ et application à un exemple simple.
2. Simulation informatique d'une résolution d'EDO du premier ordre via la méthode d'EULER. Principe et codage informatique sur un exemple simple.

SVP apporter un ordinateur par groupe de colle pour ces exercices.

Exercice 1.—Résoudre (*i.e.* trouver la forme générale des solutions), cette équation différentielle scalaire d'ordre 3 en la transformant en un système différentiel d'ordre 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, u^{(3)}(t) = 6u''(t) - 11u'(t) + 6u(t),$$

4. Résolution de l'équation de GOMPERTZ réduite $\frac{du}{dt} = -u.\ln(u)$.
5. Résolution de l'équation logistique réduite : $\frac{du}{dt} = u.(1-u)$.
6. Preuve de la constance de
$$E = r_d(\ln u - u) + r_g(\ln v - v) = \ln\left(u^{r_d} e^{-r_d.u} v^{r_g} e^{-r_g.v}\right)$$
le long d'une solution du système différentiel de LOTKA–VOLTERRA réduit (r_d et r_g sont deux constantes réelles > 0)
$$\frac{du}{dt} = -r_g(1-v).u \text{ et } \frac{dv}{dt} = +r_d(1-u).v$$
et interprétation géométrique. (L'allure des lignes de niveau de E sur $]0, +\infty[^2$ doit être connue, p.ex. du cours de SVT, le sens de déplacement doit se déduire du signe des dérivées).

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

- Nombres complexes. Polynômes. Révisions de calcul matriciel, diagonalisation pratique de matrices.

---

1. Dans les cas avec second membre, on doit proposer une forme de solution particulière.