Programme de Colles 09

Révisions : Nombres complexes, polynômes, algèbre linéaire BCPST1 : Espaces vectoriels numériques
05/02/2023–08/03/2023

PROGRAMME

Informatique/Calcul scientifique

— Mise en oeuvre de la fonction `scipy.integrate.odeint` pour résoudre un problème de CAUCHY vectoriel. Tracés.
— Etude de l'algorithme de GAUSS dans le cas CRAMER. Lien avec l'inversion de matrices.

Nombres complexes : fondamentaux et utilisation en analyse
Polynômes à coefficients réels ou complexes
— Racines d'un polynôme, multiplicité, théorème de D'ALEMBERT–GAUSS.
— Factorisation en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

⋆⋆⋆

Vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et matrices : rappels de BCPST1

— Définitions : opérations (somme, produit par un scalaire, produits matrice× vecteur, matrice× matrice.)
— $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, application linéaire canoniquement associée à A, liens avec les systèmes linéaires. Théorème du rang.
— Matrices carrées : exercices d'utilisation d'identités polynomiales pour le calcul de puissances et d'inverse : Binome de NEWTON et Identité des séries géométriques, polynôme annulant une matrice.
— Utilisation de l'algorithme de GAUSS pour l'inversion d'une (petite) matrice carrée, lien avec le TP 8 d'info.

QUESTIONS DE COURS

1. Informatique : Résolution numérique en utilisant `odeint` du problème de CAUCHY constitué du système d'équations différentielles $\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = y \\ \frac{dy}{dt} & = -4.x \end{cases}$ et de la condition initiale $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. On illustrera par un graphe des fonctions x et y sur une plage temporelle (intervalle de résolution) couvrant au moins 3 périodes. **SVP apporter un ordinateur** .
2. Informatique : Savoir identifier les différentes étapes dans une fonction Python implémentant le pivot de GAUSS, savoir compléter des fonctions implémentant les opérations élémentaires de GAUSS. **Ici, il s'agit d'informatique « papier »**
3. **Exercice 1.—**Déterminer les racines carrées de $1+i$ de deux façons différentes. Valeur « exacte [1] » de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$
4. **Exercice 2.—**Déterminer, en utilisant l'exponentielle complexe, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto e^{-2t}\cos(t)$.
5. Factorisation du polynôme $(X+1)^n - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. (attention, il faut tout refaire à la main, les racines n-ièmes de l'unité ne sont pas au programme de BCPST.)

⋆⋆⋆

6. Sur un exemple : Utilisation d'identités polynômiales pour le calcul matriciel : binôme de NEWTON pour le calcul de puissances, somme des termes consécutifs d'une suite géométrique pour le calcul d'inverse ; utilisation d'un polynôme annulant la matrice pour inverser ou conclure à la non inversibilité.
7. (Révisions de BCPST1) Etant donnée une matrice A, détermination d'un système d'équations paramétriques puis cartésiennes de $\operatorname{Im} A$, l'image [2] de A et d'une base de cet espace sur un exemple.
8. (Révisions de BCPST1) Etant donnée une matrice A, détermination d'un système d'équations cartésiennes, puis paramétriques de $\operatorname{Ker} A$, le noyau [3] de A et d'une base de cet espace sur un exemple.
9. Démontrer que l'intersection de deux sev d'un ev $\mathbb{R}^n$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.
10. Donner la définition des éléments propres d'une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On expliquera l'équivalence « λ valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda.I_n$ n'est pas inversible ».
11. **Exercice 3.—**Diagonaliser la matrice $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Les items marqués après ⋆⋆⋆ sont pour la deuxième semaine.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE QUINZAINE

— Diagonalisation pratique de matrices ; Algèbre linéaire abstraite : définitions fondatrices.

1. En terme d'expression algébrique avec racine carrée, en nombres entiers. Sans ça, une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ est...$\cos\frac{\pi}{8}$
2. Il s'agit de l'image de l'app. lin. $X \mapsto A.X$
3. Il s'agit du noyau de l'app. lin. $X \mapsto A.X$