Programme de Colles 10

Algèbre linéaire BCPST1 : Espaces vectoriels numériques, Algèbre linéaire BCPST2
11/03/2023–22/03/2023

PROGRAMME

Informatique/Calcul scientifique

— Etude de l'algorithme de GAUSS dans le cas CRAMER. Lien avec l'inversion de matrices.

⋆⋆⋆

— Simulation de variables aléatoires et théorèmes limites : illustration par la proximité des histogrammes cumulés.

Vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et matrices : rappels de BCPST1

Diagonalisation de matrices : point de vue pratique

— Définition, pour une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), de valeur propre, vecteur propre associé à une valeur propre, spectre et sous-espaces propres. Calculs sur des exemples de petite taille.
— Une famille de vecteurs propres d'une matrice M associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est une famille libre.
— Diagonalisibilité : définition par l'existence d'une base composée de vecteurs propres et validité, dans ce cas, de la formule de diagonalisation $D = P^{-1}.A.P$ par changement de base (explication purement calculatoire de $A.P = D.P$, par calcul sur les colonnes)
— Diagonalisibilité : condition nécessaire et suffisante portant sur la somme des dimensions des sev propres ; condition suffisante dans le cas de n valeurs propres distinctes.

Fondamentaux d'algèbre linéaire.

— Définitions d'un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-ev E, d'un sev de E. Exemples (espaces et sous-espaces de fonctions, de suites, de polynômes, de matrices, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$)
— Familles libres. Exemples de familles libres.
— Intersection de sev.
— Sev engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice d'un sev. Notation $\mathrm{Vect}\langle u_1, .u_n\rangle$.
— Définition d'une application linéaire $E \to F$, (morphismes, endomorphismes, formes linéaires), notations $\mathscr{L}(E,F), \mathscr{L}(E)$. Exemples variés (évaluation, app.lin. canoniquement associée à une matrice, dérivation, intégration, décalage). Endomorphismes obtenus par restriction de l'image.
— Opérations sur les applications linéaires, composition, réciproque, notation f^n pour $f \in \mathscr{L}(E), n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$
— Noyau, image : caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
— Ecriture de $\mathrm{Ker}\, f$, ensemble des solutions d'un problème linéaire homogène (récurrences linéaires, équations différentielles linéaires, *etc.*) sous la forme paramétrique $\mathrm{Vect}\langle u_1, .u_n\rangle$.

⋆⋆⋆

— Bases en dimension finie. Dimension. Coordonnées dans une base.
— Détermination de la dimension d'un $\mathbb{K}$-ev. Arguments de dimension. Rang d'une famille de vecteurs.
— Rang d'une application linéaire, d'une matrice. Liens entre ces différentes notions de rang.
— Inversibilité d'une application linéaire et dimension.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

— Matrices d'applications linéaires.
— Matrices de passage, formules de changement de bases.
— Théorème du rang « abstrait »

QUESTIONS DE COURS

1. Donner la définition des éléments propres d'une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On expliquera l'équivalence « λ valeur propre de $M \Leftrightarrow M - \lambda.I_n$ n'est pas inversible ».
2. Démontrer l'égalité, pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Spec}M = \mathrm{Spec}M^\top$. Montrer que 1 est toujours valeur propre d'une matrice de chaîne de MARKOV.
3. Définition de « famille libre » de vecteurs. Démonstration sur un exemple simple (suites géométriques, polynômes, fonctions polynomiales, exponentielles, trigonométriques, ...) de 3 ou 4 vecteurs de la liberté de la famille.
4. Définition d'un sev F d'un $\mathbb{K}$-ev E ; démontrer que l'intersection de deux sev de E est un sev de E.
5. Définition de « famille génératrice » d'un sous-espace vectoriel. Démonstration du fait que $\mathrm{Vect}\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ est un sous-espace vectoriel d'un ev contenant les vecteurs u_1, u_2, u_3.
6. Définition d'une application linéaire $f : E \to F$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev et vérification du caractère linéaire sur une exemple simple.
7. Définition de l'espace image $\mathrm{Im}\, f$ d'une application linéaire $f : E \to F$; démonstration qu'il s'agit d'un sev de F.
8. Définition du noyau $\mathrm{Ker}\, f$ d'une application linéaire $f : E \to F$; démonstration qu'il s'agit d'un sev de E.
9. Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire $f : E \to F$ en terme de noyau ; Surjectivité ?

⋆⋆⋆

10. Montrer que l'application $u : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}),\, u(f) = \big(x \mapsto f'(x) - \cos(x).f(x)\big)$$

est bien définie, linéaire et que par restriction, elle définit un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Donner (en justifiant rapidement) une famille génératrice de son noyau.

11. Soit $D : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'application linéaire de décalage définie par $D(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\psi = D^2 - 5.D + 6.i_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}$. Montrer que par restriction, D définit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}\,\psi$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\psi$.
12. Démonstration du résultat suivant : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. Si $f(\mathscr{E}) := (f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est libre dans F alors $\mathscr{E}$ est libre dans E.
13. Démonstration du résultat suivant : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, *injective* et $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ une famille *libre* de vecteurs de E. Alors $f(\mathscr{E}) := (f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est libre dans F.
14. Exemple simple de détermination du rang d'une famille de vecteurs d'un ev E via leurs coordonnées dans une base.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

15. Construction de matrices d'application linéaire à mettre en oeuvre sur des exemples facilement calculables.
16. Calcul de matrices d'endomorphismes via la formule du changement de base sur des exemples concrets.

Les items marqués après ⋆⋆⋆ sont pour la deuxième semaine. Ceux après ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ sont probablement pour le programme suivant.

PRÉVISIONS POUR LA PROCHAINE (ET DERNIÈRE) HUITAINE

- Algèbre linéaire : Applications linéaires et matrices, Produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}^n$.
- Probabilités et statistiques : Théorèmes « limite » et application au test de conformité d'une moyenne.