Programme de Colles 12

Géométrie Euclidienne/Thm limite, Statistiques
30/03/2024–31/12/2024

PROGRAMME

Les points après $\star\star\star$ sont pour les concours.

$\star\star\star$

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

1. Orthogonalité et théorème de PYTHAGORE. Dessins dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Définitions du produit scalaire et de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, écriture matricielle.
3. Propriétés élémentaires : linéarité, symétrie
4. Inégalités : CAUCHY–SCHWARZ, inégalité triangulaire
5. Vecteurs orthogonaux, vecteurs normés, B.O.N
6. Théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles. Commentaires, détermination d'une B.O.N. de diagonalisation à partir d'une base de diagonalisation. Des vecteurs propres associés à des v.p. distinctes sont orthogonaux.
7. Familles orthogonales, orthonormales, bases. Caractérisations matricielles. Existence d'une BON d'un sev F de $\mathbb{R}^n$.
8. Projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Formule au cas où une BON adaptée à F est connue.
9. La projection orthogonale d'un point sur un sev F réalise la distance du point à F.

Théorèmes limite en probabilités

- Convergence en loi : définition en termes de convergence de la suite des fonctions de répartition.
- Loi faible des grands nombres, Utilisation(s) en simulation
- Théorème central limite.
- Simulation informatique d'une variable aléatoire gaussienne (les 12 uniformes). Fonction de répartition gaussienne : Utilisation de `norm.cdf` de la bibliothèque `scipy.stats`,

Statistiques

- Statistiques d'échantillonnage : Echantillon, Test d'hypothèse statistique, test de conformité d'une moyenne.

QUESTIONS DE COURS

1. Si λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont valeurs propres *distinctes* d'une matrice symétrique réelle associées respectivement aux vecteurs propres v_1 et v_2 alors v_1 et v_2 sont orthogonaux.
2. Sur un exemple : Etant donnés deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^n$, non colinéaires, construire une base orthogonale (u, v') de $F = \mathrm{Vect}\langle u, v\rangle$ en choisissant correctement $v' = u - \lambda.v$. En construire une BON.
3. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^n$.
4. Equivalence entre définition officielle et caractérisation matricielle d'une projection orthogonale sur un sev F (*i.e.* $P^2 = P$, $P^\top = P$ et $\mathrm{Im}\, P = F$).
5. A propos de la formule (HORS PROGRAMME, exercice) $P = V.(V^\top.V)^{-1}.V^\top$ donnant la matrice (relativement à la base canonique) de projection sur $F = \mathrm{Vect}\left\langle V_1, \dots, V_p\right\rangle$ avec $V = (V_1|\dots|V_p)$: Démonstration du fait que si $V = (V_1|\dots|V_p)$ est de rang p alors $V^\top.V$ est inversible.
6. Enoncé de la loi faible des grands nombres. Preuve dans le cas d'un échantillon d'une v.a. admettant une variance et utilisation de l'inégalité de BIENAYMÉ–TCHEBYCHEFF.
7. Utilisation de la loi des grands nombres pour construire une fonction Python calculant une estimation de la fonction de répartition d'une v.a. réelle X donnée par une fonction Python `X()` quelconque. Implémentation machine.
8. Enoncé du théorème central limite (les deux versions) ; construction de l'intervalle de confiance pour la moyenne d'une série statistique.

ON SE REVOIT MI-MAI ! TENEZ BON, NE LÂCHEZ RIEN !

"Oh, man! The coffee's cold!
They thought of *everything*!"