# Fonctions réelles de deux variables réelles

12 septembre 2023

## Définition

- *Une fonction (à valeurs) réelle(s) de deux variables réelles est une fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *où* $D$ *est une partie de* $\mathbb{R}^2$.
- *Le graphe d'une telle fonction est la partie de* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$G_f = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R},\, z = f(x, y)\}$$

- *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *la ligne de niveau* $\lambda$ *est la partie de* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$L_{\lambda,f} = \{(x, y) \in D,\, f(x, y) = \lambda\}$$

- *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *l'ensemble de surniveau* $\lambda$ *est la partie de* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$S_{\lambda,f} = \{(x, y) \in D,\, f(x, y) > \lambda\}$$

Des exemples par ordre de complexité croissante (en fixant une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$, non vide) :

- Fonctions constantes sur $D$ :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in D, f(x,y) = a;$$

- Fonctions affines sur $D$ :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in D, f(x,y) = a.x + by + c;$$

- Fonctions (polynomiales) quadratiques sur $D$ :

$$\exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in D, f(x,y) = a.x^2 + b.y^2 + c.x.y;$$

- Fonctions polynomiales sur $D$, combinaisons linéaires des monômes $(x,y) \in D \mapsto x^i.y^j$ où $i,j \in \mathbb{N}$ :

$$\exists I, J \in \mathbb{N}, \exists (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times J}, \forall (x,y) \in D, f(x,y) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} x^i.y^j;$$

- Fonctions définies par composition à gauche avec une fonction de variable réelle, p.ex. $(x,y) \in D \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$. Ce type de formule peut donner lieu à des problèmes d'*ensemble de définition*, d'où la possibilité de restreindre le domaine de définition à une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$

On peut représenter graphiquement une fonction réelle de deux variables réelles en représentant son graphe (en général une surface dans $\mathbb{R}^3$ et donc en 3D [1]) ou, à la manière d'une carte topographique, en 2D, en zonant le plan par lignes et ensembles de sur-(sous)-niveau pertinents.
Exemples : affines, quadratiques, à la machine carte topographique.

1. Mettez vos lunettes !


Figure – Les lignes de niveau sur une carte topographique.

Il y a pour les fonctions de deux variables réelles une notion de limite en un point $(x_0, y_0)$ du plan, variante de la notion de limite d'une fonction d'une variable réelle en un point $x_0$ de la droite.
Cette notion est *stricto sensu* hors de notre programme mais sans y faire allusion, on ne peut pas comprendre le reste du discours.
La distance entre deux arguments de la fonction n'est plus mesurée par la valeur absolue de la différence mais par la norme (euclidienne) de la différence et mène à la définition suivante :

## Définition

*Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction,* $\ell$ *un nombre réel,* $(x_0, y_0)$ *un point du plan. On dit que* $f$ *admet pour limite* $\ell$ *en* $(x_0, y_0)$*, ce que l'on note*

$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} \ell,$$

*si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in D,$$
$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

La question de la position du point $(x_0, y_0)$ relativement à l'ensemble $D$ amène à s'intéresser aux points $(x_0, y_0)$ qui sont « intérieurs » à $D$, *i.e.* tels qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \eta_0 \Rightarrow (x,y) \in D$$

Un ensemble $D$ dont tous les points sont intérieurs à $D$ est appelé un ensemble *ouvert dans* $\mathbb{R}^2$ et le seul exemple que nous ayons au programme est l'exemple des *pavés ouverts*, *i.e.* les parties de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $I \times J$ où $I$ et $J$ sont des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$. (Dessins ! ! !)

## Définition

- *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *et* $(x_0, y_0) \in D$. *On dit que* $f$ *est continue en* $(x_0, y_0)$ *si*

$$f(x,y) \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} f(x_0,y_0)$$

- *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2$ *et* $P \subset D$. *(Le programme nous impose de travailler sur* $P$*, un pavé ouvert) On dit que* $f$ *est continue sur* $P$ *si* $f$ *est continue en tout* $(x_0, y_0) \in P$. *On note ce fait par la locution « $f$ est de classe* $\mathscr{C}^0$ *sur* $P$ *».*

La continuité de $f$ au point $(0,0)$ est équivalente à l'existence du DL à l'ordre 0 en $(x_0, y_0)$ :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + o(1)$$

où $o(1)$ est une fonction de limite 0 lorsque $(h,k) \to (0,0)$.

Exemples pour l'établissement d'une continuité par analyse des opérations et compositions présentes dans une formule :

- (Admis) Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Les exemples les plus simples sont les constantes $(x, y) \mapsto a$ et les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.
- De ceci, on déduit qu'une composée de fonction d'une variable réelle continue sur $\mathbb{R}$ par une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par exemple $(x, y) \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Plus généralement, si la composition « se passe bien », on a continuité de la fonction composée. Par exemple

$$f : (x, y) \in D \mapsto \ln(1 - (x^2 + y^2))$$

est continue sur tout pavé ouvert contenu dans le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$. En effet, soit $P$ un tel pavé ouvert.

1. La fonction $p : (x, y) \mapsto 1 - (x^2 + y^2)$ est continue sur $P$ car elle y est polynomiale. Elle y est à valeurs dans $]0, +\infty[$.
2. La fonction ln est $\mathscr{C}^0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. $f = \ln \circ p$ est donc continue sur $P$.

La question de la différentiabilité d'une fonction de deux variables en un point $(x_0, y_0)$ est la question [2] de l'existence d'un DL d'ordre 1 en $(x_0, y_0)$, *i.e.* la question de l'existence de $a$ et $b$ tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + a.h + b.k + o(\|(h,k)\|)$$

où $o(\|(h,k)\|)$ est une fonction (infiniment petit d'ordre 1) telle que

$$\frac{o(\|(h,k)\|)}{\|(h,k)\|} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$$

Il s'agit de la possibilité d'approximer $f(x,y)$ au voisinage de $(x_0, y_0)$ par une fonction affine de deux variables.

2. Ce n'est pas une limite de taux d'accroissement ! !

En physique on note $h = dx$, l'accroissement de la variable $x$, $k = dy$, l'accroissement de la variable $y$, et on écrit

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + a.dx + b.dy \text{ à l'ordre 1}$$

Une remarque de notation importante : En mathématiques, usuellement, les lettres utilisées pour définir une fonction n'ont pas d'importance (invariance d'une proposition logique par substitution de noms de variables muettes) et les deux définitions de la fonction $f$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + 2.y^2$$

et

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, f(s,t) = s^2 + 2.t^2$$

sont logiquement strictement identiques.

Pour les fonctions de deux variables, nous faisons une entorse à cette règle ! ! ! Cette entorse, bien comprise, amène des simplifications d'écriture notable (attention à lever les ambiguités) et est compatible avec l'usage en physique ou en théorie des équations différentielles. On dira donc « Soit $f$ la fonction des deux variables $x$ et $y$ définie par la formule $f(x,y) = ..$ » en conservant les noms des lettres ayant servi à cette définition, ces noms marquent une « position de variable » dans la définition de $f$. Ici « $x$ » est le nom de la première variable de position de $f$, « $y$ », le nom de la seconde variable de $f$.
D'un point de vue pédagogique, dans les quelques paragraphes suivants, on va distinguer les deux utilisations de ces lettres en distinguant $x$ (la variable $x$) et $\boldsymbol{x}$ (la position de $x$ dans la définition de $f$). Normalement, l'usage fait que cette distinction devient inutile.

Etant donnée une fonction $f$ des deux variables réelles $x$ et $y$ définie par $f(x,y) = \ldots$ pour $(x,y) \in P$, où $P = I \times J$ est un pavé ouvert dans $\mathbb{R}^2$, on peut, pour chaque point $(x_0, y_0) \in P$, définir deux fonctions d'une variable réelle, les fonctions partielles.

- La fonction partielle $f_{\boldsymbol{y}=y_0}$ est la fonction de la variable réelle $x$ définie par $f_{\boldsymbol{y}=y_0}(x) = f(x, y_0)$. (On maintient donc la deuxième variable (utilisation de $\boldsymbol{y}$) constante à $y_0$). C'est une fonction définie sur l'intervalle ouvert $I$ : $f_{\boldsymbol{y}=y_0} : I \to \mathbb{R}$.
- La fonction partielle $f_{\boldsymbol{x}=x_0}$ est la fonction de la variable réelle $y$ définie par $f_{\boldsymbol{x}=x_0}(y) = f(x_0, y)$. (On maintient donc la première variable (utilisation de $\boldsymbol{x}$) constante à $x_0$). C'est une fonction définie sur l'intervalle ouvert $J$ : $f_{\boldsymbol{x}=x_0} : J \to \mathbb{R}$.

On note, sous réserve d'existence des nombres dérivés incriminés,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(x_0, y_0) = f'_{\boldsymbol{y}=y_0}(x_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(x_0, y_0) = f'_{\boldsymbol{x}=x_0}(y_0)$$

De la sorte (pourvu qu'il n'y ait aucune réserve d'existence lorsque $(x_0, y_0)$ est un point quelconque de $P$ ! !), on définit deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ et $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}$ des deux variables $x$ et $y$. Ce sont les deux dérivées partielles de $f$.
Exemples de calcul à improviser.
D'un point de vue pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction $f$, on laisse tomber les indices ($x_0$ devient $x$, $y_0$ devient $y$). Pour dériver une « formule » par rapport à $x$, on considère que $y$ est constant (non variable donc) et on dérive, comme d'habitude, la formule de la seule variable réelle restante ($x$).

### Proposition-Définition

*Soit* $f : P = I \times J = \{(x, y), x \in I, y \in J\} \to \mathbb{R}$ *une fonction des deux variables réelles* $x$ *et* $y$ *; Si les deux fonctions* $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}$ *sont bien définies sur* $P$ *et y sont de classe* $\mathscr{C}^0$*, on dit que* $f$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $P$*. Dans ce cas, en tout* $(x_0, y_0) \in P$*, on a le DL1*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(x_0, y_0).h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(x_0, y_0).k + o(\|(h, k)\|)$$

La formule précédente s'écrit, en physique,

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(x,y).\delta x + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(x,y).\delta y \text{ à l'ordre 1}$$

ou encore plus résumé (on oublie totalement la référence au point), en notant $\delta f(x,y) = f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y)$,

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}.\delta x + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}.\delta y \text{ à l'ordre 1}$$

Les résultats de stabilité du caractère $\mathscr{C}^1$ par opérations algébriques, composition à gauche par une fonction d'une variable réelle $\mathscr{C}^1$ sont les mêmes que dans le cas des fonctions d'une variable réelle.
Sachant que les fonctions polynomiales sont $\mathscr{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^2$, on peut utiliser ces règles opératoires pour démontrer le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une fonction donnée par une formule.
On peut, à titre d'exercice, reprendre *verbatim*, sauf à changer $\mathscr{C}^0$ pour $\mathscr{C}^1$, l'exemple suivant la définition 3 pour établir le caractère $\mathscr{C}^1$ sur (tout pavé ouvert contenu dans) son ensemble de définition de la fonction définie par la formule $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

**Exercice 1.**—Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$. Tracer les graphes des fonctions partielles $f_{y=0}$, $f_{y=1}$, $f_{y=\frac{1}{2}}$. Interpréter ces graphes par rapport à la représentation en Fig. 1, notamment en ce qui concerne les annulations.

### Proposition-Définition (Principe de Fermat)

*Si* $f : D \to \mathbb{R}$, *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur le pavé ouvert* $P \subset D$ *admet un extremum en* $(x_0, y_0) \in P$ *alors le point* $(x_0, y_0)$ *est critique pour* $f$, *i.e. , par définition*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(x_0, y_0) = 0 \; et \; \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(x_0, y_0) = 0$$

Explication graphique, Exemples.

Pour illustrer ceci, si on pense à une fonction $f$ représentée par une carte topographique d'une région, la valeur de $f$ en $(x, y)$ étant l'altitude au point de coordonnées $(x, y)$, $X(t), Y(t)$ décrit les coordonnées d'un promeneur à l'instant $t$ alors $h(t) = f(X(t), Y(t))$ est l'altitude du promeneur à l'instant $t$.

### Théorème

*Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$, $X$ et $Y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $T$ alors $h$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $T$ avec*

$$\forall t \in T, h'(t) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(X(t), Y(t)).X'(t) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(X(t), Y(t)).Y'(t)$$

En physique, ceci se réécrit en termes de variables physiques : $F$ une variable dépendant de $x$ et $y$ ($F = f(x, y)$, $x$, $y$ des variables dépendant de la variable $t$) alors

$$\frac{dF}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}.\frac{dx}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}.\frac{dy}{d\boldsymbol{t}}$$

Sur une carte topographique (dans un paysage),

- Que signifie cette formule si le promeneur (un peu fatigué) se promène dans la ligne de niveau ?
- Que signifie cette formule si le promeneur (très en forme) veut monter le plus rapidement possible ?

## Définition

*Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $P \subset D$ est un pavé ouvert, est une fonction réelle des deux variables $x$ et $y$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$ telle que les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ et $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}$ sont elle-même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $P$, on dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $P$.*

Les résultats de stabilité du caractère $\mathscr{C}^2$ par opérations algébriques, composition à gauche par une fonction d'une variable réelle sont structurellement les mêmes que pour le caractère $\mathscr{C}^0$ ou $\mathscr{C}^1$.
Sachant que les fonctions polynomiales sont $\mathscr{C}^2$ sur tout $\mathbb{R}^2$, on peut utiliser ces règles opératoires pour démontrer le caractère $\mathscr{C}^2$ d'une fonction donnée par une formule.

Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $P$, on peut définir quatre dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}}{\partial \boldsymbol{y}}, \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}}{\partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}}{\partial \boldsymbol{y}},$$

notées respectivement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{x}^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{y} \partial \boldsymbol{x}}, \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{y}}, \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{y}^2}.$$

Le remarquable théorème de Schwarz affirme que :

**Théorème (Schwarz)**

*Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $P$, un pavé ouvert, alors, sur $P$ :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{y} \partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{y}}.$$

On peut vérifier que ce résultat, valable pour des fonctions très abstraites ( *i.e.* ne satisfaisant que la propriété *qualitative* d'être de classe $\mathscr{C}^2$, sans formule *a priori* ), se vérifie aisément pour des monômes, des fonctions polynômiales, des composées à gauche par des fonctions d'une variable réelle, etc...(Exemples ! ! !)